

Chapitre 1 : Calcul numérique, ensemble de nombres et intervalles

Table des matières

Chapitre 1 : Calcul numérique, ensemble de nombres et intervalles	1
CARPENTIER Axel	
Contenu	2
1 Ensemble de nombres	3
2 Calcul numérique	4
3 Intervalle et encadrement	5
4 Exercice bilan	6

Contenu

- Notation $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.
- Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, droite numérique.
- Intervalle de $\mathbb{R}$. Notation $+\infty$ et $-\infty$.
- Ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux. Encadrement décimal d'un nombre réel à 10^{-n} près.
- Ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Nombres irrationnels ; exemples fournis par la géométrie, parexemple $\sqrt{2}$ et π .
- Règles de calcul sur les puissances entières relatives, sur les racines carrées. Relation $\sqrt{a^2} = |a|$.

1 Ensemble de nombres

Depuis l'antiquité on sait compter avec des nombres de manière naturelle (compter le nombre d'arbres dans la rue, de poules dans le jardin...). C'est ce qu'on appelle les entiers naturels, notés $\mathbb{N}$.

Cependant on s'est vite rendu compte qu'il en fallait d'autres dans l'utilisation de tous les jours car on a su créer des équations qui n'avait pas de solutions dans $\mathbb{N}$ (exemple du compte bancaire dans le négatif...). On a donc créé les entiers relatifs notés $\mathbb{Z}$.

Exemple:

L'équation $x + 2 = 1$ a pour solution $-1 \notin \mathbb{N}$.

Et ainsi de suite on a su trouver des équations qui n'avaient pas de solution dans $\mathbb{Z}$. Donc on a créé les nombres décimaux et les nombres rationnels, notés respectivement $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$.

Exemple:

L'équation $2x = 1$ a pour solution $0,5 \notin \mathbb{Z}$.

L'équation $3x = 1$ a pour solution $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Tous les autres nombres sont dit irrationnels.

Exemple:

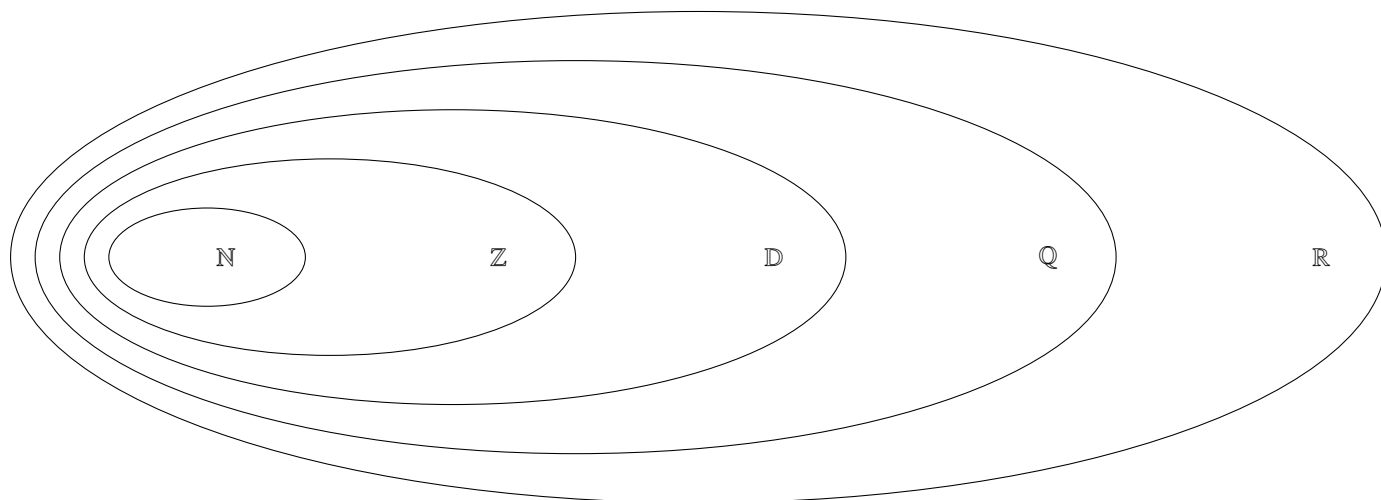
L'équation $x^2 = 2$ a pour solution $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

L'ensemble des nombres rationnels et irrationnels forment l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$. C'est l'ensemble de tous les nombres que vous connaissez !

Définition:

- On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux, $\mathbb{D} = \left\{ \frac{n}{10^k}, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}$
- On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z} \right\}$
- On note $\mathbb{R}$ tous les autres nombres

On a les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



! Remarque importante

Ces ensembles sont inclus les uns dans les autres.
On a "rajouté" des nombres aux ensembles déjà connus

Exercice:

A quel(s) ensemble(s) appartiennent ces nombres ?

5 ; -2 ; 608 ; 0,204 ; $\frac{24}{17}$; -15,001 ; $-\sqrt{7}$; $\sqrt{36}$; $-\frac{36}{6}$

Exercice:

Tracer la droite réelle et y placer les nombres suivants:

3 ; $-\frac{3}{4}$; 1,5 ; -2 ; π

2 Calcul numérique

Méthode: *Calcul de fractions*

- Additionner deux fractions, c'est d'abord les mettre au même dénominateur.
- Multiplier deux fractions, c'est multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
- Diviser deux fractions, c'est multiplier la première fraction par l'inverse de l'autre.

Exercice :

Calculer les fractions suivantes :

1. $\frac{2}{3} + \frac{5}{4}$

2. $\frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$

3. $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{4}}$

Méthode: *Calcul de puissances*

Soit a, b deux réels quelconques et n, m deux entiers relatifs.

• $a^n \times a^m = a^{n+m}$

• $a^n \times b^n = (a \times b)^n$

• $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

• $(a^m)^n = a^{m \times n}$

Exemple:

$$\begin{aligned} \bullet (-2)^4 \times (-2)^3 &= (-2)^{4+3} = (-2)^7 & \bullet \frac{6^1}{6^{-3}} &= 6^{1-(-3)} = 6^4 & \bullet (10^2)^3 &= 10^6 \end{aligned}$$

Méthode: *Calculs de racines carrées*

Soit a, b deux réels positifs.

$$\bullet \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$\bullet \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemple:

$$\bullet \sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$$

$$\bullet \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$$

3 Intervalle et encadrement

Définition:

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

- On appelle intervalle $[a, b]$ l'ensemble tous les nombres réels entre a et b .
- On dit qu'un réel x appartient à l'intervalle $[a, b]$ si $a \leq x \leq b$.

! Remarque importante

- Le crochet d'un intervalle signale si la borne est incluse ou exclue de cet intervalle selon s'il est orienté vers celui-ci (on dit qu'il est "fermé") ou non (on dit qu'il est alors "ouvert").
- Soit a un réel. L'ensemble des réels x vérifiant $x \leq a$ s'appelle l'intervalle $]-\infty; a]$. L'ensemble des réels x vérifiant $a \leq x$ s'appelle l'intervalle $[a; +\infty[$.

Exercice:

Tracer la droite réelle et y placer les intervalles suivants:

$[-1, 2]$; $]1, 3]$; $[-2, +\infty[$; $]-\infty, 2[$

Définition:

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. On dit que :

- x appartient à l'intersection de I et J , notée $I \cap J$ s'il appartient à I ET à J .
- x appartient à l'union de I et J , notée $I \cup J$ s'il appartient à I OU à J .

Exercice:

Tracer la droite réelle et y placer les intervalles $I = [0; 5]$ et $J = [4, 5; 9[$. En déduire $I \cap J$ et $I \cup J$.

Définition:

On appelle encadrement décimal d'un réel x à 10^{-n} , deux réels a et b tels que $a \leq x \leq b$ et $b - a = 10^{-n}$

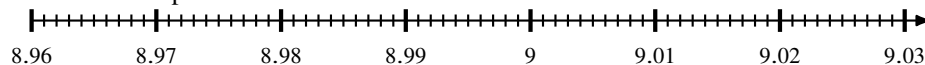
Exercice:

Donner le bon encadrement des nombres suivants:

$2,2$ à 10^{-1} près ; $0,12345$ à 10^{-5} près

4 Exercice bilan

On considère une portion de la droite réelle ci-dessous.



1. Le point $A(9, 13)$ peut-il être placé sur la droite ? Si oui, le placer.
2. Le point $B(8, 964)$ peut-il être placé sur la droite ? Si oui, le placer.
3. Représenter les intervalles $I = [8, 971; 9, 007[$, $J = [8, 998; 9, 0, 29]$. Quel est leur intersection ? leur union ?