

[RO,LE]
[REF,ROF]1

Chapitre 2 : Fonctions affines

Contenu

- Image, antécédent (algébrique et graphique).
- Interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement, variations selon son signe.

1 Caractérisation des fonctions affines

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition:

Soient $(m, p) \in \mathbb{R}^2$, une fonction affine f est une fonction de la forme $f : x \mapsto mx + p$ où m est le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.

Exemple:

La fonction $f : x \mapsto 2x + 1$ est affine mais $f : x \mapsto 3x^2 - 5$ ne l'est pas.

Exemple:

Soit la fonction affine définie par $f : x \mapsto 5x + 2$, 5 est le coefficient directeur et 2 est l'ordonnée à l'origine

! Remarque

Une fonction affine est simplement l'application du programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
- Multiplier par m
- Ajouter p

1.2 Représentations graphiques

Graphiquement, une fonction affine est représentée par une droite.

Méthode: *Représenter une fonction affine*

Représenter graphiquement une fonction affine c'est tracer sa courbe représentative.

Pour cela, il suffit de placer deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ tels que :

$$\begin{cases} y_A = f(x_A) = m \times x_A + p \\ y_B = f(x_B) = m \times x_B + p \end{cases}$$

puis de tracer la droite passant par ces deux points.

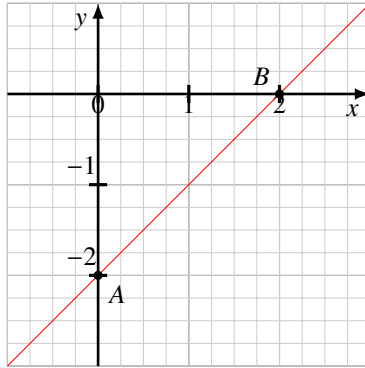
Méthode: *Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine*

- p se détermine en lisant l'intersection courbe/ordonnées.
- m se détermine en trouvant deux points $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ par lesquels passe la droite puis on a le taux d'accroissement : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Exercice:

Déterminer l'expression algébrique de la fonction affine f vérifiant $f(1) = 4$ et $f(5) = -2$.

Exemple:



- L'intersection de la courbe et de l'axe des ordonnées est en -2 . On a donc $b = -2$.
- La courbe passe par les points $A(0, -2)$ et $B(2; 0)$ d'où $a = \frac{0 - (-2)}{2 - 0} = 1$.

On a donc $f(x) = x - 2$

1.3 Images et Antécédents

Méthode: Calculer une image/ un antécédent d'une fonction affine

- Pour déterminer l'image d'un nombre réel r par une fonction f , noté $f(r)$, on remplace dans la formule tous les x par les r .
- Pour déterminer l'antécédent d'un réel s par une fonction f , on cherche tous les x tels que $f(x) = s$.

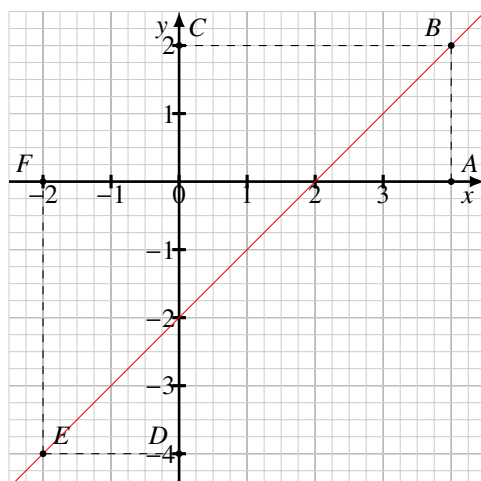
Exercice:

- Déterminer l'image de 3 par la fonction $f : x \mapsto 2x - 7$ et l'image de -2 par la fonction $g : x \mapsto 3x + 4$.
- Déterminer l'antécédent de 3 par la fonction $f : x \mapsto 2x - 7$ et l'antécédent de -2 par la fonction $g : x \mapsto 3x + 4$

Méthode: Déterminer graphiquement une image/ un antécédent d'une fonction affine

- Pour déterminer l'image d'un nombre réel r par une fonction f , on cherche r sur l'axe des abscisses et on lit le résultat sur l'axe des ordonnées.
- Pour déterminer l'antécédent d'un réel s par une fonction f , on cherche s sur l'axe des ordonnées et on lit le résultat sur l'axe des abscisses.

Exemple:



- Pour déterminer l'image de 4:
 - Je me place à 4 sur l'axe des abscisses (en A).
 - Je me déplace verticalement jusqu'à la droite (en B)
 - Je lis l'ordonnée de ce point (en C)
 L'image de 4 est 2.
- Pour déterminer l'antécédent de -4 :
 - Je me place sur -4 sur l'axe des ordonnées (en D).
 - Je me déplace horizontalement jusqu'à la droite (en E).
 - Je lis l'abscisse de ce point (en F).
 L'antécédent de -4 est -2

Exercice:

Sur le même graphiques, quels sont respectivement l'image de 3 et l'antécédent de -1 ?

2 Etude d'une fonction affine

2.1 Equations et Inéquations

! Remarque importante

Résoudre une équation numériquement et graphiquement revient strictement à déterminer un antécédent graphiquement ! En effet, une équation est une expression mathématiques de la forme $f(x) = s$ qui est exactement ce qu'on a vu dans la partie précédente.

On s'intéresse donc à la résolution d'expressions de la forme $f(x) \leq s$ ou $s \leq f(x)$. C'est-à-dire trouver tous les x tels que cette expression est vraie. Le résultat sera donc un intervalle et non un nombre réel.

Tout comme les équations, on a deux méthodes pour résoudre une inéquation, le calcul ou graphiquement.

Exercice:

Donner la solution ou l'intervalle de solutions des équations/inéquations suivantes. On définit $f : x \mapsto 9x - 2$ et $g : x \mapsto 5x + 1$. Résoudre :

- $f(x) = 5$
- $g(x) = -3$
- $g(x) \geq 4$
- $f(x) \leq -11$

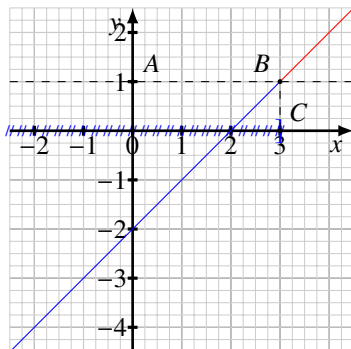
! Remarque TRES importante

Dans une inéquation, quand on **multiplie** ou **divise** par un nombre négatif **L'INEGALITE CHANGE DE SENS**.

En plus du calcul, on a la représentation graphique. La méthode est sensiblement la même que pour une équation.

Méthode: Résoudre graphiquement une inéquation

Pour résoudre une inéquation de la forme $f(x) \leq s$ (resp. $s \leq f(x)$), on trace la droite horizontale passant par le point s et on regarde l'intervalle des x pour lequel la courbe est en dessous (resp. au dessus) de la droite.

Exemple:

- Résoudre l'équation $f(x) \leq 1$
 - Je me place à 1 sur l'axe des ordonnées (en A).
 - Je me déplace horizontalement jusqu'à la droite (en B).
 - Je m'intéresse à la partie de la droite inférieure à 1, donc à la partie bleue de la gauche.
 - Je lis l'abscisse de ce point (en C)

La solution de l'inéquation $f(x) \leq 1$ est $] -\infty; 3]$.

2.2 Sens de variation

Définition:

Soient $x_1 \leq x_2$ deux réels quelconques et f une fonction affine.

- f est dite croissante si $f(x_1) \leq f(x_2)$ c'est-à-dire qu'elle conserve l'ordre.
- f est dite décroissante si $f(x_1) \geq f(x_2)$ c'est-à-dire qu'elle renverse l'ordre.

Exemple:

La fonction $f : x \mapsto 3x + 2$ est croissante alors que la fonction $g : x \mapsto -3x + 2$ est décroissante.

De manière beaucoup plus générale on a le résultat suivant.

Théorème:

Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine.

- Si $m > 0$ alors la fonction est croissante.
- Si $m < 0$ alors la fonction est décroissante.
- Si $m = 0$ alors la fonction est constante.

Démonstration:

Pour rappel, en considérant deux réels quelconques x_1 et x_2 , on a obtenu l'expression $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Ceci signifie donc qu'on a l'équivalence : $a > 0 \iff f(x_2) - f(x_1) > 0$. D'où le résultat.

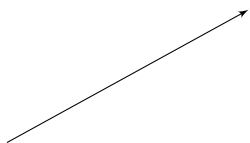
Exercice:

Quel est le sens de variation des fonctions suivantes ?

- $f : x \mapsto 8$
- $g : x \mapsto -3x + 5$
- $h : x \mapsto x$

! Remarque

Les variations d'une fonction affine $f : x \mapsto mx + p$ peuvent être résumées dans un tableau dit de variation. Exemple si $m > 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
f		

2.3 Signe d'une fonction affine

Définition:

Soit f une fonction quelconque.

- f est positive sur un intervalle I si $\forall x \in I, f(x) > 0$.
- f est négative sur un intervalle I si $\forall x \in I, f(x) < 0$.

! Remarque

- Déterminer si une fonction est positive ou négative revient à résoudre une inéquation.
- Si une fonction affine f est non constante, alors il existe un unique réel r pour lequel $f(r) = mr + p = 0$. D'où $r = -\frac{p}{m}$.

De la même manière que pour les variations, on résume le signe d'une fonction affine $f : x \mapsto mx + p$ dans un tableau dit de signe. Exemple si $m > 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Exercice :

Soit $f : x \mapsto 5x - 2$ une fonction affine. Tracer sa courbe représentative puis donner les tableaux de variations et de signes.

3 Exercice bilan

Soit $f : x \mapsto \frac{5}{2}x - 3$ une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f(5)$.
2. Déterminer l'antécédent de -3 par f .
3. Résoudre l'équation $f(x) = \frac{3}{2}$.
4. Résoudre l'inéquation $f(x) < 1$.
5. Tracer la courbe représentative de f dans un repère.