Chapitre 4 : Fonctions de référence

CARPENTIER Axel

Contents

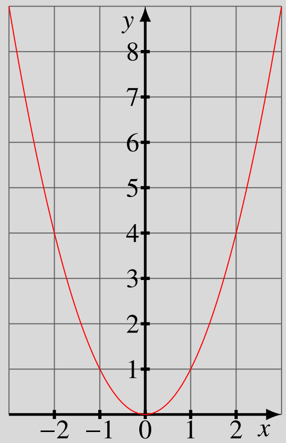
Contenu

- Fonction carré, racine carrée : définitions et courbes représentatives.
- Variations des fonctions carrée et racine carrée.
- Fonction inverse, cube : définitions et courbes représentatives.
- Variations des fonctions inverse, cube.

1 Fonction carré

On sait calculer des carrés d'entiers ($1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$ ...) mais on s'est rendu compte qu'il était possible de généraliser cette notion à des nombres non entiers. En effet il s'agit simplement, pour un nombre donné, de le multiplier par lui même.

Définition:
Soit $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction carré par $x \mapsto x^2$. Sa représentation graphique est une parabole d'équation $y = x^2$.



Propriété:

1. Pour tout réel x, on a que $x^2 \geq 0$, on en déduit donc le tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		+	0	+	

2. La fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$, on en déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x^2$	↘	0	↗

Démonstration:

- Le produit de deux réels de même signe est positif, d'où le premier point.
- Montrons la croissance de la fonction sur $[0; +\infty[$, l'autre cas étant identique.
  Soient $0 \leq x_1 \leq x_2$, on a :
  $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\geq 0}\underbrace{(x_2 + x_1)}_{\geq 0} \geq 0$. D'où le résultat.

2 Fonction racine carrée

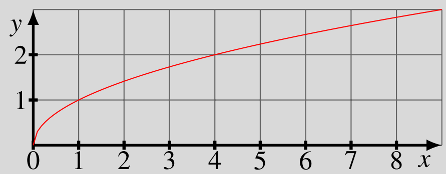
De même que pour la fonction carré, on sait calculer les racines carrées de certains nombres ($\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{16} = 4$; ...) mais il y a beaucoup de nombres dont on ne connait pas les racines carrées précises ($\sqrt{2}$; $\sqrt{7}$; ...) mais qui sont des nombres qui existent bels et biens ! Plus généralement encore on a essayé de généraliser ce concept à des nombres non entiers.

Définition: Soit $x \in \mathbb{R}^+$,

- La racine carrée de x est le nombre positif, noté $\sqrt{x}$, tel que :

$$(\sqrt{x})^2 = x$$

- La fonction racine carrée est $x \mapsto \sqrt{x}$. Sa représentation graphique est une courbe d'équation $y = \sqrt{x}$.



! Remarque Importante

La fonction racine carrée n'est pas définie pour les nombres strictement négatifs.

Propriété:

1. Pour tout réel x, on a que $\sqrt{x} \geq 0$, on en déduit donc le tableau de signe :

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$+$	

2. La fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$, on en déduit le tableau de variation :

x	0		$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	0	$\nearrow$	

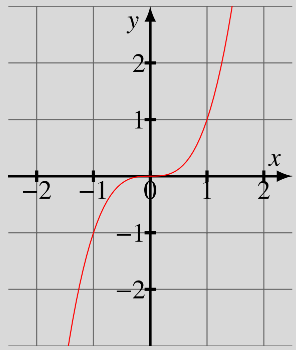
Démonstration:

- Par définition de la racine carrée.
- Montrons la croissance de la fonction sur $[0; +\infty[$.
  Soient $0 \leq x_1 \leq x_2$, on a :
  $x_1 = (\sqrt{x_1})^2 \leq (\sqrt{x_2})^2 = x_2$ donc par croissance de la fonction carrée on a $\sqrt{x_1} \leq \sqrt{x_2}$.

3 Fonction cube

On sait calculer des cubes d'entiers ($1^3 = 1$; $2^3 = 8$; $3^3 = 27$ ...) mais on s'est rendu compte qu'il était possible de généraliser cette notion à des nombres non entiers. En effet il s'agit simplement, pour un nombre donné, de le multiplier deux fois par lui même.

Définition:
Soit $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction cube par $x \mapsto x^3$. Sa représentation graphique est une courbe d'équation $y = x^3$.



Remarque

La courbe est symétrique par rapport à l'origine, on dira alors que la fonction cube est impaire.

Propriété:

1. Pour tout réel x positif, on a que $x^3 \geq 0$, et $x^3 \leq 0$ si x est négatif, on en déduit donc le tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$	

2. La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit donc le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x^3$		0	

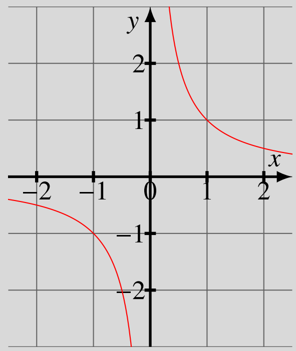
Démonstration:

- Le produit de trois nombres positifs et positifs et le produit de trois nombres négatifs est négatif.
- Montrons la croissance de la fonction sur $\mathbb{R}$.
  Soient $x_1 \leq x_2$, on a :
  $f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\geq 0}\underbrace{(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)}_{\geq 0} \geq 0$. D'où le résultat.

4 Fonction inverse

Définition:

Soit $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[= \mathbb{R}^*$, on définit la fonction inverse par $x \mapsto \frac{1}{x}$. Sa représentation graphique est une hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.



Remarque Importante

- La fonction inverse n'est pas définie en 0.
- La courbe est symétrique par rapport à l'origine, on dira alors que la fonction inverse est impaire.

Propriété:

1. Pour tout réel x positif, on a que $\frac{1}{x} \geq 0$, et $\frac{1}{x} \leq 0$ si x est négatif, on en déduit donc le tableau de signe :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$-$	||	$+$

2. La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit donc le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$0 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 0$

Démonstration:

- Le quotient de 1 et d'un nombre négatif est négatif. Le quotient de 1 et d'un nombre positif est positif.

- Montrons la décroissance de la fonction sur $[0;+\infty[$, l'autre cas étant identique.
  Soient $0 \leq x_1 \leq x_2$, on a :

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{\overbrace{x_1 - x_2}^{\leq 0}}{\underbrace{x_1 x_2}_{\geq 0}} \leq 0.$$ D'où le résultat.

5 Applications des fonctions de références

5.1 Equations et inéquations

Propriété:
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = c$ dépendent du signe de c.

- Si $c > 0$, alors l'équation a deux solutions $-\sqrt{c}$ et $\sqrt{c}$.
- Si $c = 0$, alors l'équation a une seule solution 0.
- Si $c < 0$, alors l'équation n'a pas de solution réelle.

Démonstration:
Par disjonction de cas:

- Si $c < 0$: Un carré ne peut être négatif, il n'y a donc pas de solution réelle.
- Si $c = 0$: $x^2 = 0 \iff x \times x = 0 \iff x = 0$
- Si $c > 0$: On a $x^2 = c \iff x^2 - c = 0 \iff (x - \sqrt{c})(x + \sqrt{c}) = 0 \iff x = \sqrt{c} \text{ ou } x = -\sqrt{c}$

Exercice:
Résoudre graphiquement, puis numériquement, les équations/inéquations suivantes :

- $x^2 = 9$
- $x^2 \leq 9$
- $x^2 = 0$
- $x^2 \geq 3$
- $x^2 = 3$
- $x^2 < -2$
- $x^2 = -1$
- $x^2 > 0$

Propriétés:

- Soit $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = |a|$.
- Soit $b \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} = b \iff x = b^2$

Démonstration:

- Par disjonction de cas selon le signe de a.
- Par définition de la racine carrée.

Exercice:
Résoudre graphiquement, puis numériquement, les équations/inéquations suivantes :

- $\sqrt{x} = 3$
- $\sqrt{x} \leq 3$
- $\sqrt{x} = 0$
- $\sqrt{x} \geq 2$
- $\sqrt{x} = \sqrt{3}$
- $\sqrt{x} < -2$
- $\sqrt{x} = -1$
- $\sqrt{x} > 0$

Propriété:

Soit $a \in \mathbb{R}$, $x^3 = a \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$

Démonstration:
Par définition de la racine cubique.
Exercice:
Résoudre graphiquement, puis numériquement, les équations/inéquations suivantes :

- $x^3 = 27$
- $x^3 \leq 27$
- $x^3 = 0$
- $x^3 \geq 3$
- $x^3 = 3$
- $x^3 < -8$
- $x^3 = -1$
- $x^3 > 0$

Propriétés:
Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x} = a \Longleftrightarrow x = \frac{1}{a}$

Démonstration:
$\frac{1}{x} = a \quad \Longleftrightarrow \quad ax = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{a}$

Exercice:
Résoudre graphiquement, puis numériquement, les équations/inéquations suivantes :

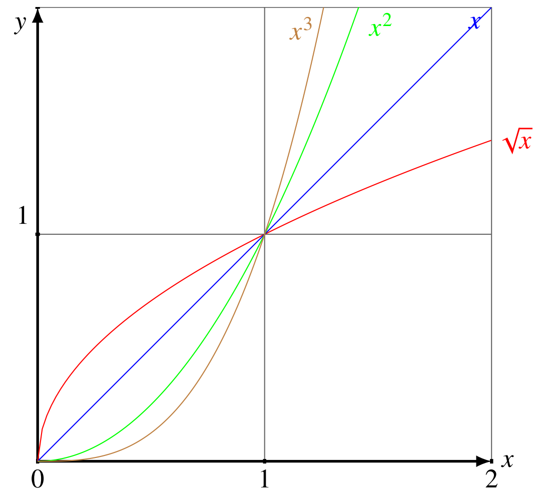
- $\frac{1}{x} = 3$
- $\frac{1}{x} \leq 3$
- $\frac{1}{x} = 0$
- $\frac{1}{x} \geq 2$
- $\frac{1}{x} = \sqrt{3}$
- $\frac{1}{x} < -2$
- $\frac{1}{x} = -1$
- $\frac{1}{x} > 0$

5.2 Position relative des courbes sur $\mathbb{R}^+$

Propriété:

- Si $0 < x < 1$, $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$.
- Si $x > 1$, $\sqrt{x} < x < x^2 < x^3$.
- Si $x = 0$ ou $x = 1$, $\sqrt{x} = x = x^2 = x^3$.

Démonstration:
Par disjonction de cas selon les valeurs de x puis en considérant la différence de deux fonctions et en étudiant son signe.



6 Exercice bilan

Résoudre les équations suivantes :

1. $4(x+1)^2 - 6 = -5$
2. $\dfrac{1}{4x-2} = 7$
3. $45 - (x+2)^3 = 1$