

Chapitre 5 : Equations et inéquations

Table des matières

Chapitre 5 : Equations et inéquations	1
CARPENTIER Axel	
Contenu	2
1 Equations	3
1.1 Equations du 1er degré	3
1.2 Résoudre une équation en se ramenant au 1er degré	3
2 Inéquations	4
2.1 Inéquations du 1er degré	4
2.2 Résoudre une équation en se ramenant au 1er degré	5
3 Exercice bilan	5

Contenu

- Somme d'inégalités. Produit d'une inégalité par un réel positif, négatif, en liaison avec le sens de variation d'une fonction affine.
- Ensemble des solutions d'une équation, d'une inéquation.

1 Equations

1.1 Equations du 1er degré

Définition:

- Une équation est une égalité dans laquelle intervient un nombre inconnu, désigné le plus souvent par une lettre (en général, x).
- Résoudre une équation d'inconnue x , c'est trouver l'ensemble de ses solutions, c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres (s'il en existe) pour lesquels l'égalité est vraie. On appelle cet ensemble l'ensemble des solutions de l'équation (noté en général S).
- Le degré d'une équation est la plus grande puissance de l'inconnue.

Exemple:

Les équations $2x + 1 = 3x - 2$ et $x - 2 = 4x - 5$ sont de degré 1.

Les équations $2x^2 - 8 = 0$ et $(x - 1)(x + 5) = 0$ sont de degré 2.

! Vocabulaire

Si on considère l'équation $2x + 1 = 3x - 2$ on a:

- $2x + 1$ qui s'appelle le "membre de gauche".
- $3x - 2$ qui s'appelle le "membre de droite".
- x qui s'appelle l'inconnue.

Méthode:

Pour résoudre une équation, on "rassemble" les termes de même degré ensemble du même côté de l'égalité.

"Les x avec les x , les nombres avec les nombres".

! Remarque

Ajouter, retrancher, multiplier ou diviser par un même nombre transforme l'équation initiale en une autre équivalente.

Exercice:

Résoudre l'équation $3x + 5 = 5x - 7$.

1.2 Résoudre une équation en se ramenant au 1er degré

La résolution de certaines équations de degré plus élevé se ramène parfois à la résolution d'une équation de degré 1. Pour cela, on ramène tous les termes dans le même membre et tenter de factoriser ou de développer.

Propriété:

- Un produit de nombres réels est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Pour tout réel x ,
 $A(x)B(x) = 0 \iff A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$
- Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul. Pour tout réel x ,
 $\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \iff A(x) = 0$ et $B(x) \neq 0$

Démonstration: (Hors programme)

Le résultat est vrai par intégrité de $\mathbb{R}$.

! Remarque

Les valeurs qui annulent le dénominateur sont appelées "valeurs interdites"

Exercice:

Résoudre les équations suivantes en précisant les éventuelles valeurs interdites.

- $(2x - 5)(6x + 1) = 0$
- $\frac{4x - 3}{x + 1}$

2 Inéquations

2.1 Inéquations du 1er degré

Depuis longtemps, le concept d'inégalité et des notions de "plus grand" et "plus petit" vous sont connus avec les notations suivantes :

Rappels:

Soit a et b deux nombres réels quelconques.

- $a \leq b$ signifie que a est inférieur ou égal à b .
- $a \geq b$ signifie que a est supérieur ou égal à b .
- $a < b$ signifie que a est strictement inférieur à b .
- $a > b$ signifie que a est strictement supérieur à b .

! Règles de calculs

On a déjà vu que pour une égalité, on peut additionner, soustraire, multiplier ou diviser un même nombre dans chaque membre.

Pour une inégalité il y a une différence. On peut toujours additionner et soustraire dans les deux membres sans soucis.

Pour ce qui est de la multiplication et de la division il y a une règle de calcul **TRES IMPORTANTE** !

- Si $k > 0$ et $a < b$ alors $ka < kb$ et $\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$.
- Si $k < 0$ et $a < b$ alors $ka > kb$ et $\frac{a}{k} > \frac{b}{k}$.

Définition:

On appelle inéquation une inégalité dans laquelle il y a une inconnue.

Résoudre une inéquation revient à déterminer l'ensemble de toutes les valeurs de l'inconnue qui vérifient l'inégalité.

Exemple:

Les expressions $3x + 4 < 7x + 9$ et $2x + 6 \geq x - 5$ sont des inéquations du 1er degré.

2.2 Résoudre une équation en se ramenant au 1er degré

Propriété:

- Pour tout réel x ,
 $A(x)B(x) \geq 0$ (resp ≤ 0) $\iff A(x)$ et $B(x)$ sont de mêmes signes (resp signes opposés).
- Pour tout réel x ,
 $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ (resp ≤ 0) $\iff A(x)$ et $B(x)$ sont de mêmes signes (resp signes opposés).

Démonstration:

Evident en procédant par disjonction de cas.

Exemple:

Réolvons l'inéquation $f(x) = (x - 1)(2x - 6) \leq 0$.

On détermine tout d'abord les racines de l'expression algébrique :

$$x - 1 = 0 \iff x = 1 \quad \text{et} \quad 2x - 6 = 0 \iff x = 3$$

On a alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+	+
$2x - 6$	-	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	+

3 Exercice bilan

Soit $A(x)$ une expression algébrique donnée sous trois formes différentes :

• $(3x - 5)^2 - 9$

• $9x^2 - 30x + 16$

• $(3x - 8)(3x - 2)$

Utiliser la forme la plus adaptée pour résoudre les équations suivantes :

1. $A(x) = 0$

2. $A(x) = -9$

3. $A(x) = 16$