

Chapitre 6 : Probabilités

Table des matières

Chapitre 6 : Probabilités	1
CARPENTIER Axel	
Contenu	2
1 Vocabulaire des évènements	3
1.1 Vocabulaire	3
1.2 Intersection et union d'évènement	3
1.3 Représentation des événements	4
2 Probabilité d'un évènement	5
3 Exercice bilan	7

Contenu

- Ensemble (univers) des issues. Événements. Réunion, intersection, complémentaire.
- Loi (distribution) de probabilité. Probabilité d'un événement : somme des probabilités des issues.
- Relation $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.
- Dénombrement à l'aide de tableaux et d'arbres.

1 Vocabulaire des évènements

1.1 Vocabulaire

Définition:

- On appelle expérience aléatoire une expérience dont le résultat est dû au hasard.
- Une issue x_i est un résultat possible de l'expérience aléatoire.
- On note $\Omega = \{x_1; x_2; x_3; \dots\}$ l'ensemble des issues possibles, appelé l'univers.
- Un évènement est un sous ensemble de Ω composé d'une ou plusieurs issues (entre accolade). S'il n'y a qu'une issue, on dit qu'il est élémentaire.

Exemple:

- On lance un dé numéroté de 1 à 6. On a $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. L'évènement "obtenir un 5" est élémentaire mais l'évènement "obtenir un nombre pair" ne l'est pas.
- On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. On a $\Omega = \{7 \text{ coeur}, 7 \text{ carreau}, \dots, As \text{ pique}, As \text{ trefle}\}$. Soit les évènements :

– A: "tirer le 7 de coeur"

– B: "Tirer un pique"

On a $A = \{7 \text{ coeur}\}$ qui est élémentaire et $B = \{7 \text{ pique}, 8 \text{ pique}, \dots, As \text{ pique}\}$ ne l'est pas.

Définition:

On appelle évènement certain tout évènement égal à Ω .

On appelle évènement impossible, noté $\emptyset$, tout évènement irréalisable.

Exemple:

Si on tire un dé, l'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ l'évènement "Obtenir un nombre positif" est certain alors que l'évènement "Obtenir un 7" est impossible.

Exercice :

On considère une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10. Parmi ces boules, 5 sont rouges, 3 sont bleues et 2 sont vertes. Décrire dans chacun des cas l'univers de l'expérience aléatoire.

1. On tire une boule au hasard et on s'intéresse à sa valeur.
2. On tire une boule au hasard et on s'intéresse à sa couleur.

1.2 Intersection et union d'évènement

Définition:

Soient A et B deux évènements.

- L'évènement "A et B", noté $A \cap B$, est constitué des issues réalisant à la fois A et B.
- L'évènement "A ou B", noté $A \cup B$, est constitué des issues réalisant A ou B.
- Les évènements A et B sont dits contraires si l'un se réalise lorsque l'autre ne se réalise pas. B est alors l'évènement contraire de A, noté $\bar{A}$.
- Deux évènements sont dits disjoints s'ils ne peuvent pas se réaliser simultanément, c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$

Exemple:

On s'intéresse à l'expérience aléatoire d'un tirage de carte.

On considère les évènements suivants $A = \text{"Tirer un 8"} ; B = \text{"Tirer un pique"} ; C = \text{"Tirer le 7 de pique"}$
 On a les évènements suivants:

- $A \cap B = \text{"tirer le 8 de pique"} \text{ et } A \cup B = \text{"tirer un 8 ou un pique"}.$
- $A \cap C = \emptyset \text{ et } A \cup C = \text{"tirer un 8 ou le 7 de pique"}.$
- $B \cap C = C \text{ et } B \cup C = B.$

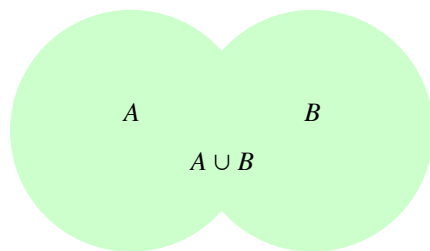
Exercice:

On lance un dé à six faces.

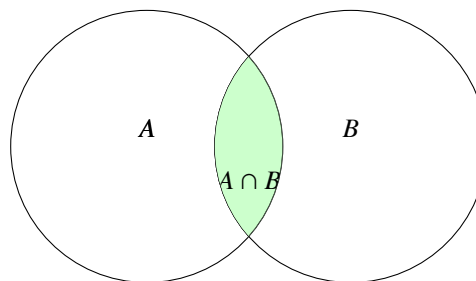
1. Donner l'évènement contraire de l'évènement $A : \text{"Obtenir un nombre pair"}.$
2. Donner l'évènement $\text{"Obtenir un nombre pair et un nombre inférieur à 5"}.$
3. Donner l'évènement $\text{"Obtenir un nombre impair et un nombre supérieur à 2"}.$

1.3 Représentation des évènements

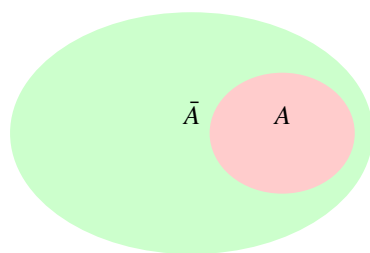
1.3.1 Diagrammes ou patates



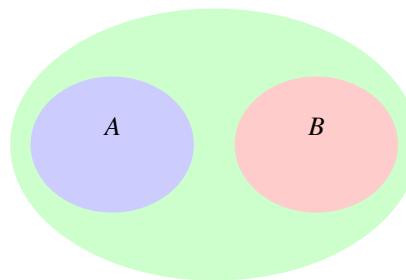
Réunion d'événements



Intersection d'événements



Evénements contraires



Evénements disjoints

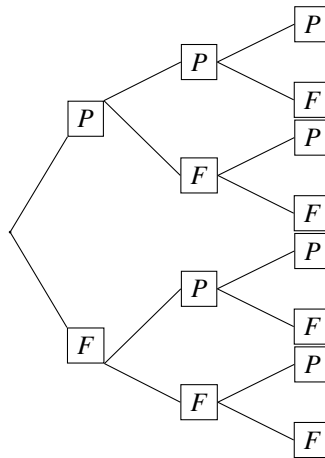
1.3.2 Tableaux

On lance deux dés à 4 face et on calcule le produit obtenu :

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

1.3.3 Arbres de probabilité

On lance une pièce de monnaie trois fois de suite, on peut schématiser cette expérience par un arbre:



2 Probabilité d'un évènement

Définition:

Soit Ω un univers fini. On définit une probabilité en associant à chaque événement un nombre entre 0 et 1 tel que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ pour tous événements A et B disjoints.

Exercice :

On lance un dé à 6 faces.

1. On suppose que le dé n'est pas truqué, déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire puis de l'évènement A : "Le nombre sorti est pair".
2. On suppose que le dé est truqué avec :

$$\bullet \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{12}$$

$$\bullet \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{5}{12}$$

$$\bullet \mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(\{4\}) = \mathbb{P}(\{5\})$$

Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire puis de l'évènement A : "Le nombre sorti est pair".

Propriétés:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- Pour tout évènement A , $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$
- Pour tous évènements A et B , $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- Pour tout évènement A , $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Démonstration:

- Les deux premiers points sont élémentaires par définition d'une probabilité.
- Posons $A_1 = A \setminus B$ et $B_1 = B \setminus A$. On a que $(A_1, B_1, A \cap B)$ forme une partition de $A \cup B$. On a donc :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

Or $(A_1, A \cap B)$ (resp $(B_1, A \cap B)$) forme une forme de A (resp B). D'où :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A \cap B) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

D'où le résultat.

- Le dernier point vient du fait que $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = \Omega$ et du point précédent.

! Remarque TRES importante

Une probabilité est **TOUJOURS** comprise entre 0 et 1.

Définition:

On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité. On a alors dans ce cas :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables à } A}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

Exemple:

- Un lancer de dé à 6 faces est bien une situation d'équiprobabilité.
- Un lancer de pile ou face est bien une situation d'équiprobabilité.

Exercice:

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Déterminer la probabilité des événements suivants:

- A : "La carte tirée est un valet."
- B : "La carte tirée est un pique."

Exercice:

On choisit un nombre au hasard compris entre 1 et 20. On note :

- A : "Le nombre est multiple de 3".
- B : "Le nombre est multiple de 2".

Donner les événements A et B puis calculer la probabilités des événements suivants :

- A
- $\bar{A}$
- B
- $A \cap B$
- $A \cup B$

3 Exercice bilan

Exercice:

Le code d'un antivol de vélo est un code à trois chiffres prenant les valeurs 0, 1 ou 2. Rayhan choisit un code au hasard.

1. Représenter la situation par un arbre de probabilité.
2. Déterminer la probabilité que le code comporte 3 chiffres différents.