

1 Probabilités

1.1 Compétences Attendues

- Calculer des probabilités dans des cas simples : expérience aléatoire à deux ou trois épreuves.
- Utiliser des modèles théoriques de référence (dé, pièce équilibrée, tirage au sort avec équiprobabilité dans une population) en comprenant que les probabilités sont définies a priori.

1.2 Exercices

Exercice 1:

Un dé dodécaédrique est un dé à douze faces. On lance un tel dé dont les faces sont numérotées de 1 à 12. On s'intéresse au numéro qui apparaît sur la face supérieure.

- Donner l'ensemble Ω de toutes les issues possibles.
- Donner la liste des issues qui forment les événements suivants et préciser le nombre d'issues qu'ils contiennent.
 - A : "Obtenir un numéro pair"
 - B : "Obtenir un numéro multiple de 3"
 - C : "Obtenir un numéro pair et multiple de trois". C'est l'ensemble des éléments à la fois dans A et dans B. On notera $C = A \cap B$
 - D : "Obtenir un numéro au moins pair ou multiple de trois". C'est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B. On notera $D = A \cup B$
 - E : "Obtenir un numéro qui n'est pas un multiple de trois". C'est l'ensemble des éléments qui ne sont pas dans B. On notera $E = \bar{B}$
- On considère les événements F : "Obtenir un numéro impair" et G : "Obtenir un multiple de deux". Déterminer puis dénombrer les issues réalisant chacun des événements suivants.

$$(a) F \cap G \quad | \quad (b) F \cup G \quad | \quad (c) \bar{F} \cap \bar{G} \quad | \quad (d) \bar{F} \cap \bar{G}$$

Exercice 2:

On lance deux fois de suite une pièce équilibrée. On note P l'issue Pile et F l'issue Face. L'issues Pile au premier lancer et Face au second est noté PF.

- A l'aide d'un arbre ou d'un tableau à double entrée, déterminer combien d'éléments possède l'univers Ω de cette expérience aléatoire.

- On considère les événements A "On obtient une seule fois Pile" et B "On obtient Face au second lancer". Combien A et B possèdent-ils d'éléments ? Ecrire A et B sous forme d'ensemble.
- Décrire par une phrase les événements $A \cap B$; $A \cup B$; $\bar{A}$ et $\bar{B}$
 - Combien d'éléments possèdent-ils ? Les préciser.

Exercice 3:

Un sac contient quatre jetons bleus numérotés de 1 à 4 et trois jetons rouges numérotés de 1 à 3. On prélève au hasard un jeton du sac et on note sa couleur et son numéro.

- Ecrire l'ensemble des issues possibles
- On considère les événements suivants :
 - A : "On obtient un jeton portant un numéro pair"
 - R : "On obtient un jeton rouge"
 - Ecrire l'ensemble des issues appartenant à A et l'ensemble des issues appartenant à R.
 - Ecrire l'ensemble des issues appartenant à l'événement $A \cap R$
 - Ecrire l'ensemble des issues appartenant à l'événement $A \cup R$
- Quel est l'événement $\bar{A}$, événement contraire de A ? Ecrire les issues appartenant à $\bar{A}$

Exercice 4:

La loi de probabilité d'une expérience aléatoire est donnée par le tableau ci-dessous.

Issue	4	5	6	7	8	9
Probabilité	0,15	p	$3p$	$2p$	0,05	$2p$

- Calculer p
- Calculer la probabilité d'une issue multiple de trois
- A-t-on autant de chance d'avoir une issue paire qu'une issue impaire ? Justifier

Exercice 5:

On lance à deux reprises un dé tétraédrique équilibré dont les faces sont numérotés de 1 à 4. On forme avec les deux résultats obtenus, dans l'ordre d'apparition, un nombre à deux chiffres.

- Quelle est la probabilité de chaque issue à chacun des tirages ? Que peut-on conclure ?

2. A l'aide d'un arbre ou d'un tableau à double entrée, déterminer combien de nombres on peut obtenir au total.

3. On considère les événements A "Le nombre est un multiple de 11" et B "Le nombre est impair".

(a) Traduire par une phrase l'événement $A \cap B$

(b) Calculer la probabilité de l'événement $A \cup B$

Exercice 6:

Une urne A contient trois boules noires numérotées de 1 à 3. Une urne B contient deux boules blanches numérotées 1 et 2. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard une lettre du mot AMI. Si c'est une voyelle, on prélève une boule dans l'urne A, sinon on prélève au hasard une boule dans l'urne B. On constitue ainsi un couple formé d'une lettre et d'un chiffre.

1. Combien l'univers de cette expérience aléatoire possède-t-il d'éléments ? *On pourra s'aider d'un arbre*

2. On considère les événements E "la lettre tirée est une voyelle" et F "Le numéro sorti est 2". Calculer la probabilité des événements suivants.

(a) $\bar{E}$ | (b) $\bar{F}$ | (c) $E \cap F$ | (d) $E \cup F$

Exercice 7:

Dans une classe de Seconde, on a représenté dans le tableau suivant les langues vivantes étudiées en première langue par les 35 élèves. (On suppose que chaque élève étudie une seule première langue)

	Anglais	Allemand	Espagnol
Garçons	8	3	4
Filles	10	4	6

On interroge au hasard un élève de cette classe. On s'intéresse aux événements suivants :

• F : "L'élève interrogé est une fille"

• E : "L'élève interrogé étudie l'espagnol comme première langue"

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants : $E \cap F$; $E \cup F$; $\bar{E}$; $\bar{E} \cap \bar{F}$; $E \cup \bar{F}$

Exercice 8:

On lance deux fois de suite un dé tétraédrique équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On note la somme des résultats obtenus.

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessus afin de déterminer l'univers de cette expérience aléatoire.

2. Etablir la loi de probabilité de cette expérience

3. On considère les événements suivants.

• A : "La somme est impaire"

• B : "La somme est un multiple de trois"

• C : "La somme est au plus égale à 4"

Calculer la probabilité des événements suivants.

(a) A | (c) C | (e) $\bar{C}$
 (b) B | (d) $A \cap B$ | (f) $\bar{B} \cap C$

Exercice 9:

Un examinateur doit interroger, dans un certain ordre, quatre candidats : Wassim, Lina, Ayman et Maissa. Il doit donc établir une liste ordonnée de quatre noms.

1. A l'aide d'un arbre, déterminer le nombre de listes possibles.

2. On suppose que l'examineur tire la liste ordonnée des quatre noms au hasard, chaque liste possible ayant la même probabilité. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants:

• E : "Lina est interrogée en premier"

• F : "Maissa est interrogée en dernier"

• G : "Wassim est interrogée avant Lina"

3. Définir par une phrase l'événement $E \cap F$ et en donner la probabilité.

4. Définir par une phrase l'événement $E \cup F$ et en donner la probabilité

Exercice 10:

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants.

- A : "La carte prélevée est un as"
- T : "La carte prélevée est un trèfle"

1. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(T)$
2. (a) Décrire par une phrase les événements $A \cap T$ puis $A \cup T$
(b) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(A \cap T)$ puis $\mathbb{P}(A \cup T)$
3. Décrire par une phrase l'événement $\bar{A}$ et calculer sa probabilité

Exercice 11:

Deux usines produisent des engrenages pour les boîtes à vitesses de voitures. Certains engrenages sont conformes et peuvent être utilisés pour un moteur, d'autres sont défectueux et détruits. Dans le tableau suivant, on a résumé le nombre d'engrenages conformes et défectueux selon les usines de fabrication durant une période donnée.

	Conformes	Défectueux
Usine A	450	12
Usine B	600	16

On prend au hasard un engrenage fabriqué dans l'une ou l'autre des deux usines. On considère les événements suivants :

- A : "L'engrenage provient de l'usine A"
- C : "L'engrenage est conforme"

1. Définir par une phrase chacun des événements suivants et calculer leurs probabilités : $\bar{A}$; $\bar{C}$; $\bar{A} \cap \bar{C}$; $A \cap \bar{C}$ et $\bar{A} \cap \bar{C}$
2. On a pris un engrenage conforme. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'usine A ?
3. On a pris un engrenage provenant de l'usine B. Quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?
4. Le directeur de l'usine A est satisfait car il prétend que dans son usine, on a moins de chances de trouver un engrenage défectueux que dans l'usine B. Que penser de cette affirmation ?

Exercice 12:

Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves d'une classe de Seconde en fonction du sexe et de la seconde langue vivante étudiée.

	Fille	Garçon	Total
Espagnol	14	11	25
Allemand	2	4	6
Italien	2	1	3
Total	18	16	34

On choisit au hasard un élève de la classe. On considère les événements F "l'élève est une fille" et E "L'élève étudie l'espagnol"

1. (a) Justifier qu'on est en situation d'équiprobabilité.
(b) En déduire les probabilités $\mathbb{P}(F)$ et $\mathbb{P}(E)$
2. Décrire par une phrase et calculer la probabilité de chaque élément suivant.

$$(a) F \cap E \quad | \quad (b) F \cup E \quad | \quad (c) \bar{E}$$

Exercice 13:

Une pièce équilibrée porte une face avec la lettre X et une face avec la lettre Y. On lance trois fois de suite la pièce, en notant à chaque fois la lettre obtenue. Le résultat est le mot formé par les trois lettres.

1. Représenter la situation par un arbre de probabilité.
2. Déterminer la probabilité d'avoir un mot contenant trois fois la même lettre.

Exercice 14:

On lance une pièce équilibrée trois fois.

1. Représenter la situation par un arbre de probabilité.
2. Quelle est la probabilité :
(a) d'avoir trois fois Face ?
(b) que le deuxième lancer soit Face ?
(c) que le troisième lancer soit différent du premier ?

Exercice 15:

Au restaurant scolaire, les élèves ont le choix :

- entre deux entrées (artichaut ou betterave).
- entre trois plats (cheval, daube ou escalope).

- entre deux desserts (fromage ou gâteau).

Un menu se compose d'une entrée, d'un plat et d'un dessert.

1. En utilisant un arbre, représenter tous les menus possibles.
2. Combien de menus différents sont possibles ?
3. On choisit un menu au hasard, quelle est la probabilité :
 - (a) qu'il comporte une escalope ?
 - (b) qu'il comporte de l'artichaut et du fromage ?
 - (c) qu'il ne comporte pas de cheval ?

Exercice 16:

Un groupe de quatre amis, Malek, Samira, Thomas et Inès sont dans un bateau. Ils tirent au sort celui qui va ramer et, parmi les noms restants, celui qui va écoper.

1. Représenter cette situation par un arbre.
2. Déterminer les probabilités suivantes :
 - (a) C'est un garçon qui rame.
 - (b) Samira écope.
 - (c) Les deux qui travaillent sont de même sexe.

Exercice 17:

Une urne contient quatre jetons, deux jaunes, un rose et un violet. On tire au hasard un jeton de l'urne puis un second sans remettre le premier. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Représenter la situation par un arbre.
2. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
3. On considère les événements suivants :
 - R : "Le premier jeton tiré est rose."
 - J : "Le deuxième jeton tiré est jaune."

Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(R)$, $\mathbb{P}(J)$, $\mathbb{P}(R \cap J)$ puis $\mathbb{P}(R \cup J)$.

4. On considère l'événement N : "Aucun jeton tiré n'est jaune. Calculer $\mathbb{P}(N)$ et $\mathbb{P}(\bar{N})$.

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 18 :

En 2016, 27% des français ont téléchargé un contenu illégalement. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il permette de simuler le tirage au sort d'un français selon qu'il a téléchargé ou non un contenu illégalement.

```
if random.random() <= . . . . :
    print("A_telecharge_illegalement")
else :
    print(" . . . . ")
```

1
2
3
4

Exercice 19 :

Le joueur de basketball Stephen Curry a un taux de réussite de 90,4% au lancer-franc. On considère l'algorithme ci-dessous.

```
Effectif=0
for i in range(1;5):
    if random.random() <= 0.904:
        Effectif+=1
return Effectif
```

1
2
3
4
5

- (a) Quelle est la valeur de la variable **Effectif** en fin d'algorithme si **random.random()** a pris successivement les valeurs (arrondies à 0,01 près) 0,52 ; 0,89 ; 0,28 ; 0,95
- (b) A quoi ce résultat correspond-il en termes de simulation de lancer-francs tentés par Stephen Curry ?

1.4 Approfondissements

Exercice 20:

Quelle est la probabilité d'être né un 29 février ?

Exercice 21:

On lance trois dés cubiques simultanément puis on calcule le produit des trois dés obtenus. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?