1 Représentations graphiques de fonctions, variations et extremums

1.1 Compétences Attendues

- Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées.
- Lecture d'images et d'antécédents.
- Résoudre une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$
- Relier représentation graphique et tableau de variations.
- Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle.
- Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine.

1.2 Exercices

Exercice 1:

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$f(x) = \frac{-1}{x} + 8$$
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
Le point $A\,(2;8)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$? Justifier.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -2x^2 + 2x - 4$$
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
Le point $A\left(\frac{4}{5}; -\frac{93}{25}\right)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$? Justifier.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -5x - 6$$
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
Le point $A(0; -6)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$? Justifier.

Exercice 2:

1. Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$v(x) = -x^2 - 3x - 1$$
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction v dans un repère.
N est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\frac{1}{5}$. Quelle est son ordonnée ?

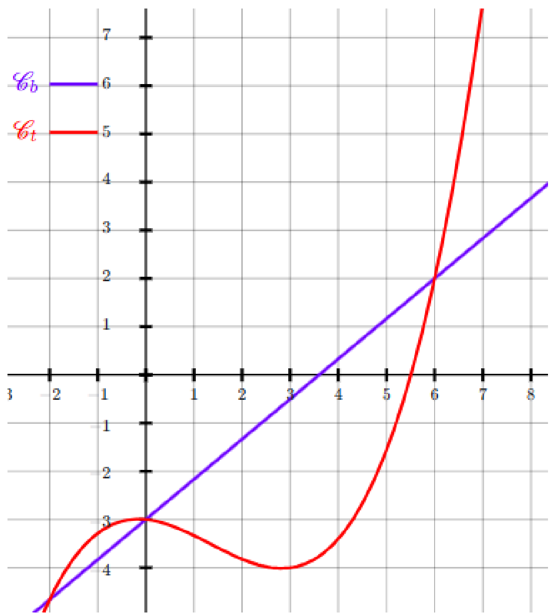
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$h(x) = \frac{3}{x} + 1$$
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction h dans un repère.
Existe-t-il des points de $\mathcal{C}$ d'ordonnée 9 ?
Si oui, quelles sont les abscisses possibles de ces points ?

3. Soit w la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$w(x) = 8x - 8$$
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction w dans un repère.
N est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\frac{6}{7}$. Quelle est son ordonnée ?

Exercice 3:
Une société de location de véhicules particuliers propose le tarif suivant pour un week-end de location :
TARIF WEEK-END : forfait de 116 euros puis 0,51 euros par km parcouru (dans la limite de 800 km).
On note x le nombre de km parcourus par un client au cours d'un week-end et on considère la fonction T qui à chaque valeur de x associe le prix payé par le client.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction T.
2. Exprimer $T(x)$ en fonction de x.
3. Résoudre l'équation $T(x) = 235{,}85$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

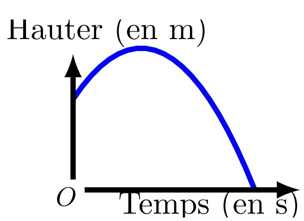
Exercice 4:
On considère les fonctions b et t définies sur $\mathbb{R}$ et dont on a représenté ci-dessous une partie de leurs courbes respectives.
Résoudre graphiquement l'équation $b(x) = t(x)$ sur $[-3;8]$.
Résoudre graphiquement l'inéquation $b(x) \leqslant t(x)$ sur $[-3;8]$.



Exercice 5:
Lors d'une course en moto-cross, après avoir franchi une rampe, Karim a effectué un saut en moto. On note t la durée (en secondes) de ce saut. Le saut commence dès que Karim quitte la rampe c'est-à-dire lorsque $t = 0$. La hauteur (en mètres) est déterminée en fonction de la durée t par la fonction u suivante :

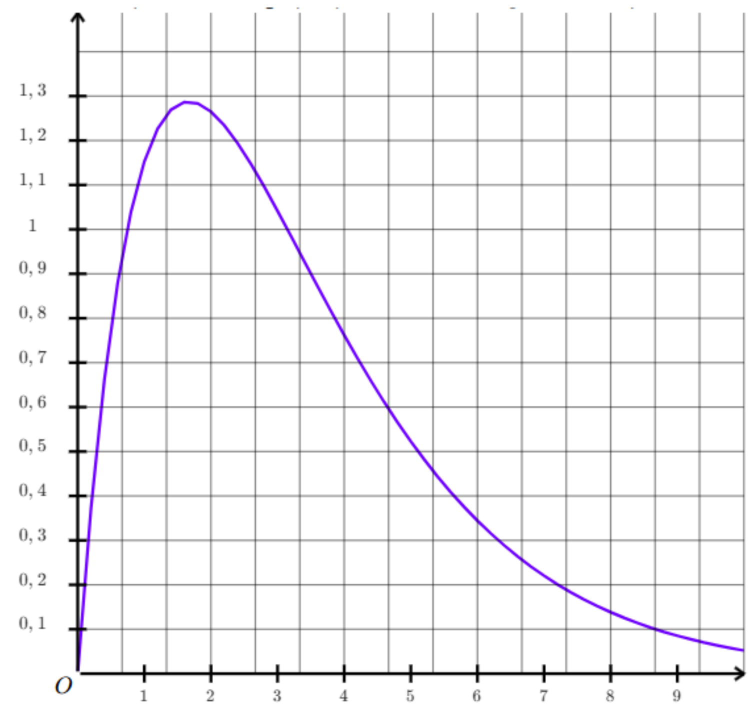
$$u(t) = (-4t - 1{,}4)(t - 3{,}9)$$

Voici la courbe représentative de cette fonction u :



1. Calculer $u(4)$. Que peut-on en déduire ?
2. À quelle hauteur Karim se trouve-t-il lorsqu'il quitte la rampe ?
3. Combien de temps dure le saut de Karim ?
4. Développer et réduire l'expression de u.

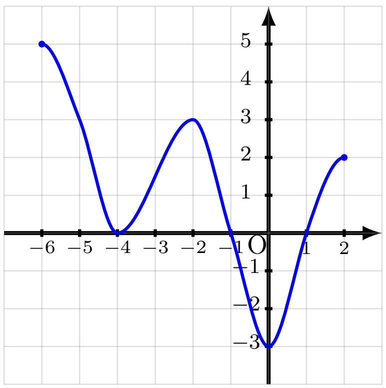
Exercice 6:
Le Code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux d'alcoolémie est supérieur ou égal à $0,5$ g/L.
Le taux d'alcoolémie d'une personne pendant les 10 heures suivant la consommation d'une certaine quantité d'alcool est modélisé par la fonction g.
• t représente le temps (exprimé en heure) écoulé depuis la consommation d'alcool ;
• $g(t)$ représente le taux d'alcoolémie (exprimé en g/L) de cette personne.
On donne la représentation graphique de la fonction g dans un repère.



1. À quel instant le taux d'alcoolémie de cette personne est-il maximal ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir au centième.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $g(t) > 0,5$.
3. À l'instant $t = 0$, il était 11 h. À quelle heure, à la minute près, l'automobiliste peut-il reprendre le volant sans être en infraction ?

Exercice 7:

Voici la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[-6\,;\,2]$.

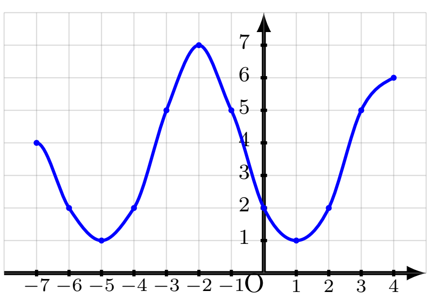


Répondre aux questions en utilisant le graphique.

1. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -3$?
2. Résoudre l'équation $f(x) = -4$. Donner l'ensemble solution.
3. Déterminer une valeur entière de k telle que $f(x) = k$ admette exactement 2 solutions.

Exercice 8:

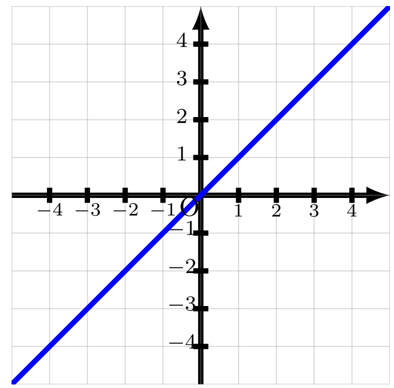
Voici la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[-7\,;\,4]$.

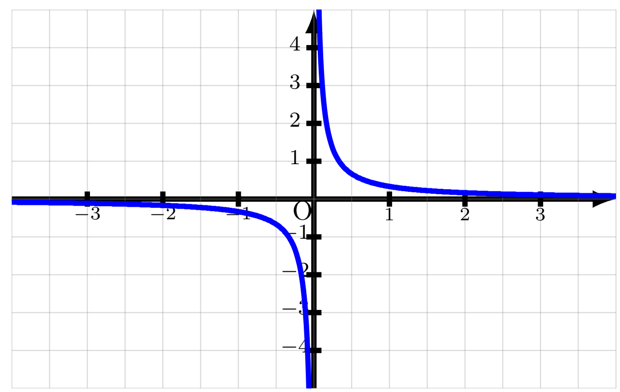


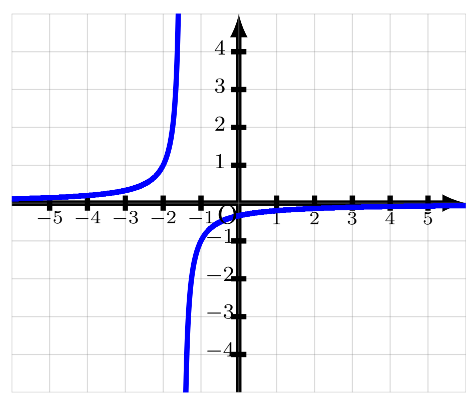
Répondre aux questions en utilisant le graphique.

1. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$?
2. Résoudre l'équation $f(x) = 5$. Donner l'ensemble solution.
3. Déterminer une valeur entière de k telle que $f(x) = k$ admette exactement 4 solutions.

Exercice 9:
Déterminer, par lecture graphique mais en le justifiant, si la fonction f représentée est paire, impaire ou ni paire, ni impaire.

1. 

2. 

3. 

Exercice 10:

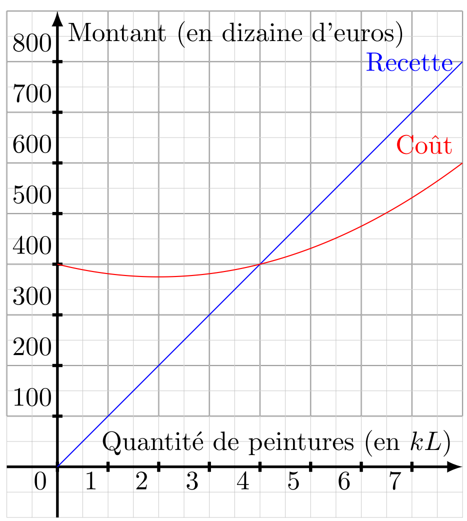
1. Soit f la fonction définie sur $D = [-5; 3]$ par $f(x) = -x^2 - 6$.
   (a) Déterminer, en expliquant, si la fonction f est paire, impaire, ou ni l'une, ni l'autre.
   (b) En déduire des éventuelles propriétés graphiques de la représentation graphique de f.
2. Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R}$, par $f(x) = -3$.
   (a) Déterminer, en expliquant, si la fonction f est paire, impaire, ou ni l'une, ni l'autre.
   (b) En déduire des éventuelles propriétés graphiques de la représentation graphique de f.

Exercice 11:

L'entreprise Ecolor est spécialisée dans la production et la vente de peinture éco-responsable. La production quotidienne varie entre 0 et 800 litres. Toute la production est vendue. Les montants de la recette et du coût sont exprimés en dizaine d'euros.

A l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes.

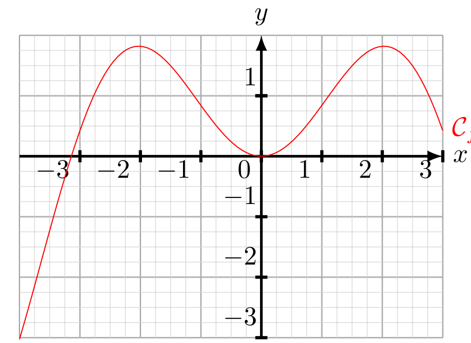
1. Déterminer le coût de production de 200 litres de peinture.
2. Quelle est la production de peinture pour avoir une recette de 5 000 euros ?
3. A partir de combien de litres de peinture vendus l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?
4. L'entreprise peut-elle réaliser un bénéfice de plus de 3 000 euros pour une production quotidienne variant entre 0 et 800 litres ? Justifier.



Exercice 12:

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-4; 3]$. Estimer graphiquement les solutions des équations et des inéquations suivantes.

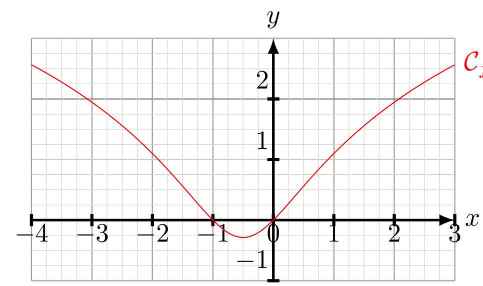
1. $f(x) = -3$
2. $f(x) = 1$
3. $f(x) \leq -1$
4. $f(x) \geq 0$



Exercice 13:

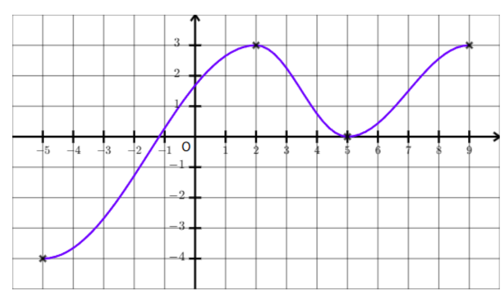
Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-4; 3]$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Déterminer l'image de 0 par la fonction f.
3. Déterminer les antécédents de 2 par la fonction f.
4. Résoudre l'inéquation $f(x) > 2$.

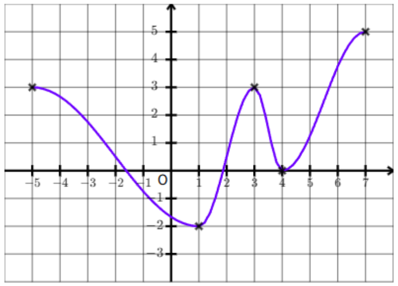


Exercice 14:

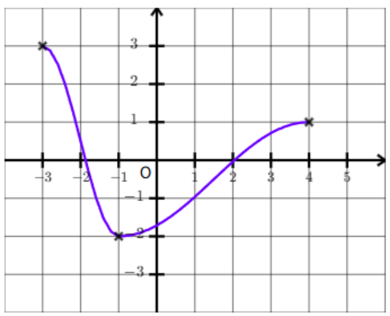
1. Voici la courbe représentative d'une fonction h.
   Dresser son tableau de variations sur son ensemble de définition et préciser son maximum et son minimum.



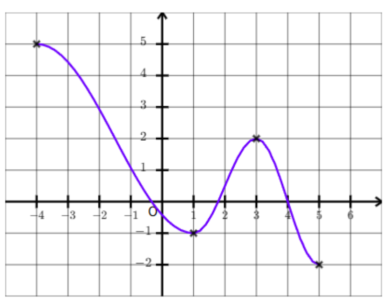
2. Voici la courbe représentative d'une fonction u.
   Dresser son tableau de variations sur son ensemble de définition et préciser son maximum et son minimum.



3. Voici la courbe représentative d'une fonction v.
   Dresser son tableau de variations sur son ensemble de définition et préciser son maximum et son minimum.



4. Voici la courbe représentative d'une fonction f.
   Dresser son tableau de variations sur son ensemble de définition et préciser son maximum et son minimum.



Exercice 15:

1. On donne ci-dessous, le tableau de variations d'une fonction f.
   Comparer si possible : $f(3)$ et $f(4)$.

x	0		5		12
$f(x)$	51	↘	1	↗	99

2. On donne ci-dessous, le tableau de variations d'une fonction f.
   Comparer si possible : $f(-4)$ et $f(-1)$.

x	-5		-3		1
$f(x)$	-5	↗	13	↘	1

3. On donne ci-dessous, le tableau de variations d'une fonction f.
   Comparer si possible : $f(-2)$ et $f(8)$.

x	-5		2		8
$f(x)$	-5	↗	5	↘	-15

Exercice 16:
Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-12; 24]$.

x	-12		8		19		24
$f(x)$	2	↗	11	↘	10	↗	14

Déterminer le minimum et le maximum de f sur son ensemble de définition. Préciser en quelles valeurs de x ils sont atteints.

Exercice 17:

On considère une fonction dont on donne ci-dessous le tableau de variations.

x	-2		0		1		4
$f(x)$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Quelle est l'image de 0 par f ?
3. Préciser les intervalles sur lesquels f est croissante, puis ceux sur lesquels f est décroissante.
4. Tracer une représentation graphique possible pour la fonction f

Exercice 18:

1. (a) Construire l'allure de la courbe représentative de la fonction carré.
   (b) En déduire le minimum et le maximum de la fonction carré sur l'intervalle $[-1; 4]$ puis sur l'intervalle $[-3; 2]$
2. (a) Dresser le tableau de variations de la fonction inverse sur les intervalles $[2; 5]$ et $[-10; -2]$
   (b) En déduire le minimum et le maximum de la fonction inverse sur ces intervalles

Exercice 19:

On donne le tableau de variations de la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$

1. Quel est le signe de a ?
2. Déterminer le signe de b.
3. Expliquer pourquoi le tableau permet d'écrire : $2a + b = 0$
4. Déterminer a et b sachant que la droite représentative de f passe par le point de coordonnées $(0; 6)$

Exercice 20:

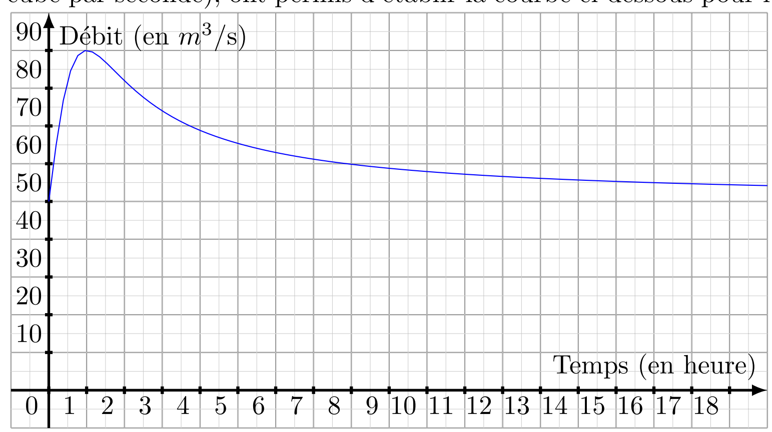
On donne le tableau de variations de la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

1. Quel est le signe de a ?
2. Déterminer le signe de b.
3. D'après le tableau, l'image de -4 est 0. Traduire cette information par une égalité faisant intervenir a et b.
4. Déterminer a et b sachant que l'image de 0 est 8.

Exercice 21:

Après un épisode pluvieux, un organisme surveille la crue et la décrue d'une rivière qui traverse une azone habitée. Les relevés des débits, exprimés en $m^3 \cdot s^{-1}$ (mètre cube par seconde), ont permis d'établir la courbe ci-dessous pour les prmières heures:



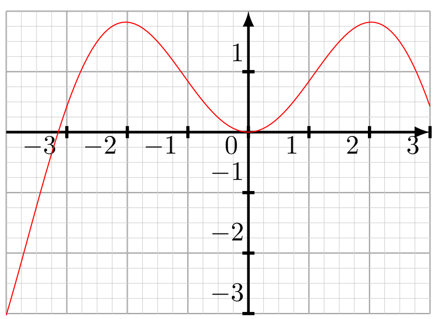
En utilisant le graphique, avec la précision permise par le graphique, répondre sans justification aux questions suivantes :

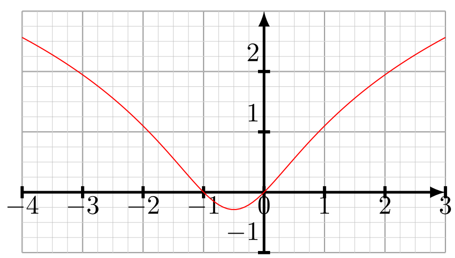
1. Donner le débit de la rivière au début de la crue
2. Indiquer le débit maximal et le moment auquel il est atteint.
3. On considère qu'il y a des risques d'inondations au-delà d'un débit de la rivière de 70 $m^3 \cdot s^{-1}$. Donner l'intervalle de temps pendant lequel il y a des risques d'inondations.

Exercice 22:

1. En utilisant le sens de variation d'une fonction de référence, comparer $\sqrt{1{,}9}$ et $\sqrt{1{,}8}$.
2. En utilisant le sens de variation d'une fonction de référence, comparer $(-2{,}77)^2$ et $(-2{,}758)^2$.
3. En utilisant le sens de variation d'une fonction de référence, comparer $2{,}672^2$ et $2{,}664^2$.
4. En utilisant le sens de variation d'une fonction de référence, comparer $-\dfrac{1}{3{,}8}$ et $-\dfrac{1}{3{,}6}$.
5. En utilisant le sens de variation d'une fonction de référence, comparer $(-8,1)^3$ et $0,9^3$.

Exercice 23:
Soit f et g deux fonctions dont les courbes représentatives dans un repère orthonormé sont données ci-dessous :

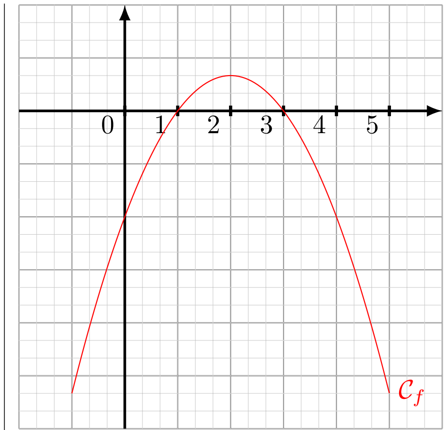




Etablir le tableau de variation de f et de g sur leur domaine de définition. Déterminer leurs extremums sur leur domaine de définition.

Exercice 24:
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1;5]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous :

1. Utiliser ce graphique pour déterminer les valeurs de $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$ et $f(5)$
2. Dans quel intervalle varie f sur $[-1;5]$?
3. Résoudre graphiquement sur $[-1;5]$ les équations suivantes : $f(x) = 0$; $f(x) = 1$; $f(x) = -2$; $f(x) = \dfrac{2}{3}$
4. Déterminer graphiquement pour quelles valeurs de x comprises entre -1 et 5 le nombre $f(x)$ est positif.
5. Résoudre graphiquement sur $[-1;5]$ l'inéquation $f(x) \geq -2$
6. Donner le tableau de variation de f sur $[-1;5]$. Déterminer en quelle valeur la fonction f atteint son maximum.



Exercice 25 :

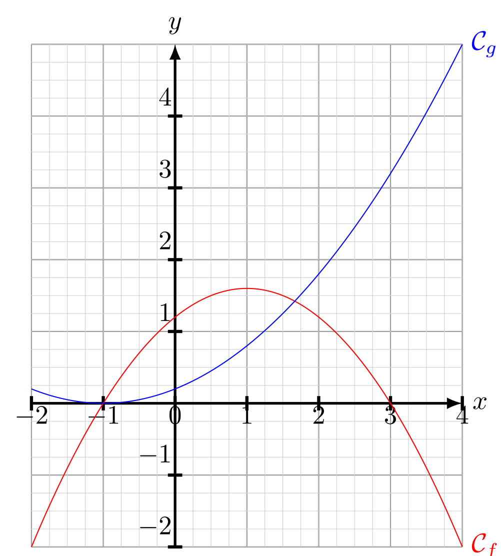
On donne ci-contre les courbes représentatives de deux fonction f et g sur $[-2;4]$.

Partie A:
Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes.

1. $f(x) = -10$
2. $f(x) > 5$
3. $f(x) \leq 0$
4. $f(x) = g(x)$

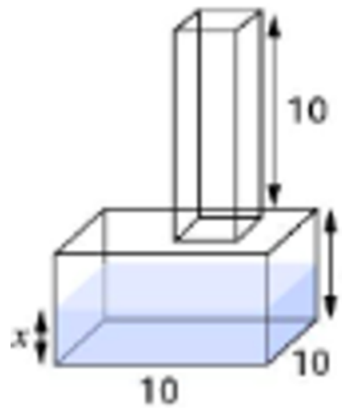
Partie B:
Dans cette partie on admetque les fonctions f et g sont définies sur $[-2;4]$ par $f(x) = \dfrac{1}{5}(x+1)(6-2x)$ et $g(x) = \dfrac{1}{5}(x^2 + 2x + 1)$.

1. Développer $f(x)$.
2. Montrer que $f(x) = -2(x-1)^2 + 8$.
3. Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersections de la courbe f avec l'axe des abscisses.
4. Déterminer les antécédents de 4 par la fonction f.
5. Etablir le tableau de variation de la fonction f puis sont tableau de signe.
6. La fonction f admet-elle un maximum ? Si oui, en quelle valeur est-il atteint ?



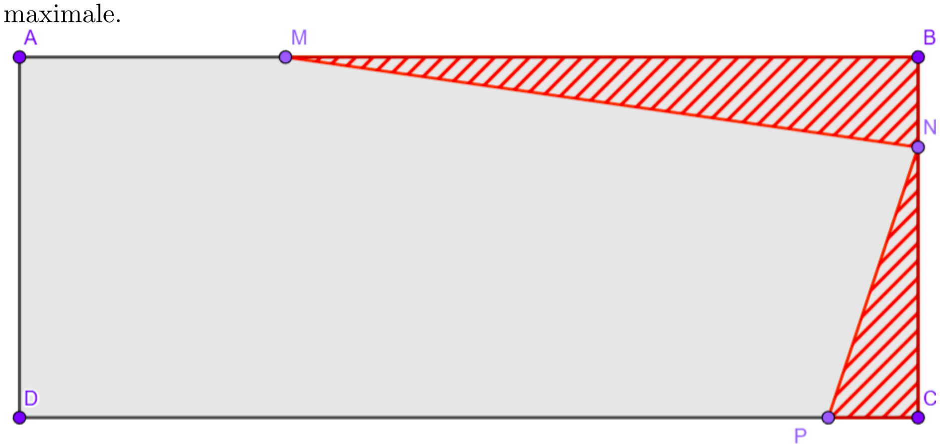
Exercice 26:

Un récipient est formé de deux pavés droits à base carrée (l'un de côté 10cm, l'autre de côté 5cm). On donne leurs hauteurs sur le schéma. On remplit d'eau ce récipient.



1. Exprimer le volume de liquide en fonction de la hauteur x d'eau
2. On souhaite remplir le récipient à la moitié de sa contenance maximale. Déterminer quelle sera la hauteur d'eau dans le récipient.
3. Même question dans le cas où on souhaite remplir le récipient aux trois quarts.

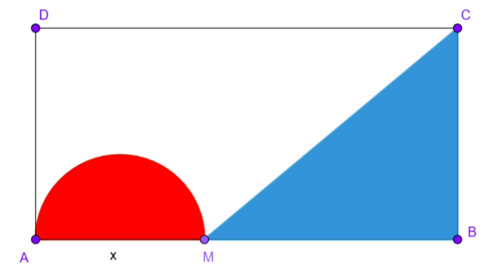
Exercice 27:
$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 10$cm et $BC = 8$cm. N est un point mobile sur le segment $[BC]$. On note x la longueur en centimètres de $[BN]$. M et P sont les points respectifs de $[AB]$ et $[CD]$ tels que $AM = BN = CP = x$.
Le but de cet exercice est de déterminer où placer N sur le segment $[BC]$ pour que l'aire de la surface jaune, la somme des aires des triangles BMN et CNP, soit maximale.

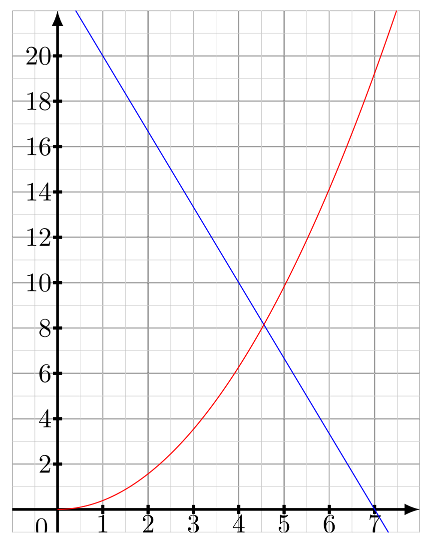


1. Justifier que $x \in [0; 8]$
2. Exprimer BM et CN en fonction de x
3. Montrer que l'aire du triangle BMN est égale à $\dfrac{10x - x^2}{2}$
4. On note f la fonction qui à la longueur x associe l'aire de la surface jaune. Vérifier que l'on a $f(x) = 9x - x^2$
5. (a) Montrer que $f(x) = -(x - 4,5)^2 + 20,25$
   (b) En déduire la solution au problème posé

Exercice 28:

Soit $ABCD$ un rectangle. On place un point M libre sur le segment $[AB]$. Comme sur la figure ci-contre, on trace un demi-cercle de diamètre $[AM]$ et le triangle MBC. On note x la distance AM.





Le graphique représente les aires $f(x)$ et $g(x)$ du demi-disque et du triangle en fonction de la valeur de x.

1. Identifier les courbes de f et de g. Justifier.
2. Retrouver les dimensions du rectangle $ABCD$.
3. Estimer graphiquement la valeur de x pour que le demi-disque et le triangle aient la même aire, puis en donner une valeur approchée au centième.

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 29:
On considère le programme ci-dessous.

```python
x=float(input("Saisir une valeur de x:"))
if x>=-1 and x<=5:
    y=3*x*x-2*x+12
    print("L'image de",x, "par g est",y)
else :
    print("La fonction n'est pas d finie en",x)
```

Ce programme permet d'afficher l'image par une fonction g. Donner $g(x)$ ainsi que son domaine de définition.

Exercice 30:
On considère la fonction $f : x \mapsto -2x + 5$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer le ou les antécédents de -2 par f.
2. Ecrire un programme Python qui prend en argument une valeur b et qui calcule puis affiche les antécédents de b par la fonction f.

1.4 Approfondissements

Exercice 31:
On considère la fonction carré f.

1. Calculer $f(a+h)$ en fonction de a et h.
2. Pour $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est donné par $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Montrer que le taux d'accroissement est égal à $2a+h$.

Exercice 32:
On étudie la fonction $f : x^2 + 2x + 3$. Le but de l'exercice est d'étudier le sens de variation de f.

1. Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leq x_2$.
   Montrer que $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)(x_1 + x_2 + 2)$.
2. (a) Montrer que si $-1 \leq x_1 \leq x_2$, alors $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$.
   (b) Que peut-on en déduire pour f sur $[-1; +\infty[$?
3. Montrer que f est décroissante sur $]-\infty, -1]$.
4. La fonction f admet-elle un extremum ? Lequel ?