

Chapitre 7 : Représentations graphiques de fonctions, variations et extremums

Table des matières

Chapitre 7 : Représentations graphiques de fonctions, variations et extremums	1
CARPENTIER Axel	
Contenu	2
1 Définitions	3
1.1 Notions de fonction, d'image et d'antécédent	3
1.2 Parité	5
2 Résolutions graphiques	5
3 Variations et extremums	6
4 Exercice bilan	7

Contenu

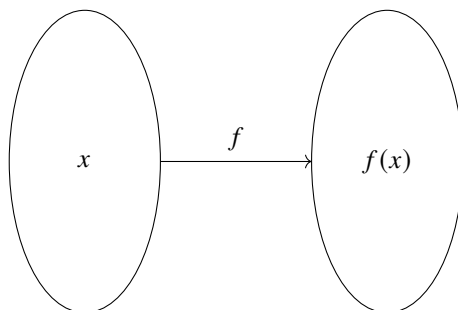
- Fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ou une réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$.
- Courbe représentative : la courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient $y = f(x)$.
- Fonction paire, impaire. Traduction géométrique.
- Croissance, décroissance, monotonie d'une fonction définie sur un intervalle. Tableau de variations.
- Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.
- Pour une fonction affine, interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement, variations selon son signe.
- Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée, cube.

1 Définitions

1.1 Notions de fonction, d'image et d'antécédent

Définition:

Définir une fonction f sur un ensemble de réels $\mathcal{D}_f$, c'est associer à chaque réel $x \in \mathcal{D}_f$ un réel y . Afin de bien comprendre que y dépend de x , on le note donc $y = f(x)$.



Notation et vocabulaire:

- On appelle domaine de définition de f , noté $\mathcal{D}_f$, l'ensemble des valeurs sur lequel f est définie.
- On note $f : x \mapsto f(x)$, la fonction qui à x associe $f(x)$. $y = f(x)$ est l'image de x , x est un antécédent de y .
- On appelle courbe représentative d'une fonction f dans le plan, notés C_f , l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$

! Remarque IMPORTANTE

Il ne faut pas confondre f et $f(x)$! f représente une fonction tandis que $f(x)$ représente un nombre réel.

! Remarque

L'ensemble de définition d'une fonction, définie par une expression, est l'ensemble des valeurs pour lesquelles le calcul d'une image a un sens. Il n'existe que deux cas (en classe de Seconde) où le calcul n'est pas possible : la division par 0 et la racine carrée d'un nombre négatif.

Exercice:

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

$$\bullet f_1 : x \mapsto \frac{1}{x+1} ;$$

$$\bullet f_3 : x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1} ;$$

$$\bullet f_5 : x \mapsto \sqrt{x-1} ;$$

$$\bullet f_2 : x \mapsto \frac{3x}{x^2-1} ;$$

$$\bullet f_4 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} ;$$

$$\bullet f_6 : x \mapsto \sqrt{2-x^2} ;$$

! Remarque importante

On a deux manières de comprendre une fonction : une expression algébrique ou un graphique. Exemple : la fonction carré/cube/...

Méthode:

- Pour déterminer une image d'un réel a :

- Graphiquement :

On place a sur l'axe des abscisses, on prend le point de la courbe d'abscisse a et on lit son ordonnée.

- Algébriquement :

On remplace tous les x par a dans l'expression algébrique de f .

- Pour déterminer un antécédent d'un réel k :

- Graphiquement :

On se place en k sur l'axe des ordonnées, on prend le ou les points de la courbe d'ordonnée k et on lit leurs abscisses.

- Algébriquement :

On cherche toutes les valeurs de $x \in \mathcal{D}_f$ telles que $f(x) = k$.

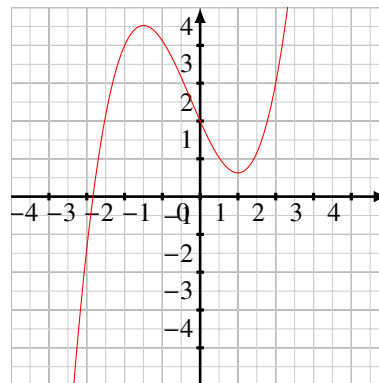
Exercice :

Soit $f : x \mapsto x^2 + 1$.

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?
2. Calculer l'image de 3 par f .
3. Calculer le (ou les) antécédent(s) de 10 par f .

Exercice:

Soit la représentation graphique C_f d'une fonction f ci-dessous.



1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ?
2. a. Déterminer l'image de 2 par f .
b. Déterminer $f(-2)$.
3. Calculer le (ou les) antécédent(s) de 2 par f .

1.2 Parité

Définition:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I (centré en 0).

- La fonction f est paire sur I si et seulement si : $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$.
- La fonction f est impaire sur I si et seulement si : $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$.

Exemple:

La fonction carré est paire tandis que la fonction cube est impaire.

! Remarque

Il existe des fonctions qui ne sont ni paires ni impaires (par exemple $f : x \mapsto x^3 + x^2$).

Propriété:

- Une fonction est paire lorsque sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
- Une fonction est impaire lorsque sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine.

Démonstration:

La démonstration est laissée au lecteur.

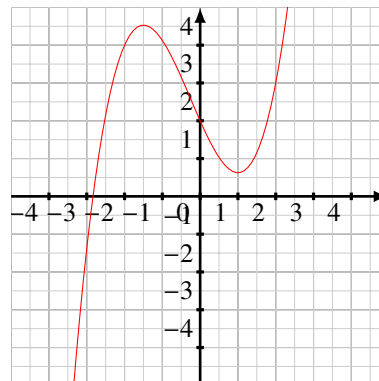
2 Résolutions graphiques

Méthode:

- Résoudre une équation $f(x) = k$ revient à déterminer les antécédents de k par la fonction f .
- Résoudre une inéquation $f(x) \geq k$ (respectivement $f(x) \leq k$) revient à déterminer les points de la courbe de f dont l'ordonnée est supérieure (respectivement inférieure) à k puis l'ensemble de leurs abscisses.

Exercice:

Soit la représentation graphique C_f d'une fonction f ci-dessous.



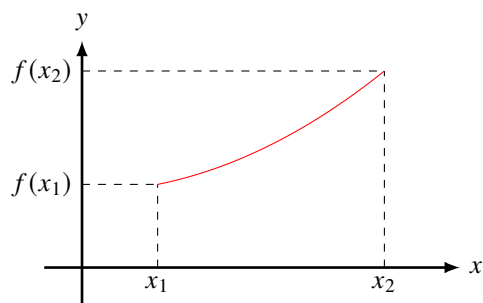
1. Déterminer la (ou les) solution(s) de $f(x) = -2$
2. Déterminer la (ou les) solution(s) de $f(x) = 4$
3. Déterminer les solutions de $f(x) < 0$.
4. Déterminer les solutions de $f(x) \geq 2$.

3 Variations et extremums

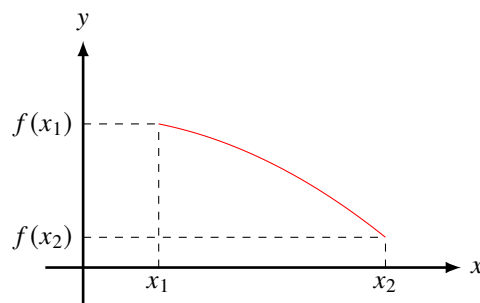
Définition:

Soient $x_1 \leq x_2$ deux réels quelconques et f une fonction affine.

- f est dite croissante si $f(x_1) \leq f(x_2)$ c'est-à-dire qu'elle conserve l'ordre.
- f est dite décroissante si $f(x_1) \geq f(x_2)$ c'est-à-dire qu'elle renverse l'ordre.
- f est dite constante si $f(x_1) = f(x_2)$.



Fonction croissante



Fonction décroissante

Définition:

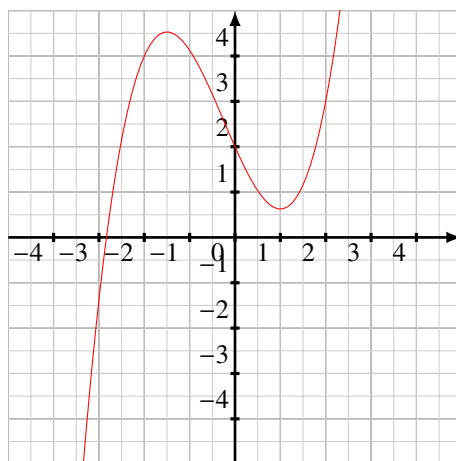
On appelle tableau de variation un résumé des variations d'une fonction f en fonction des valeurs de l'inconnue $x \in \mathcal{D}_f$.

Exemple :

x	-2	0	4
$f(x)$	0	4	-3

Exercice:

Donner le tableau de variation de la représentation graphique suivante :



Définition:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $c \in I$.

- $f(c)$ est un maximum pour la fonction f si $\forall x \in I, f(x) \leq f(c)$.
- $f(c)$ est un minimum pour la fonction f si $\forall x \in I, f(x) \geq f(c)$.

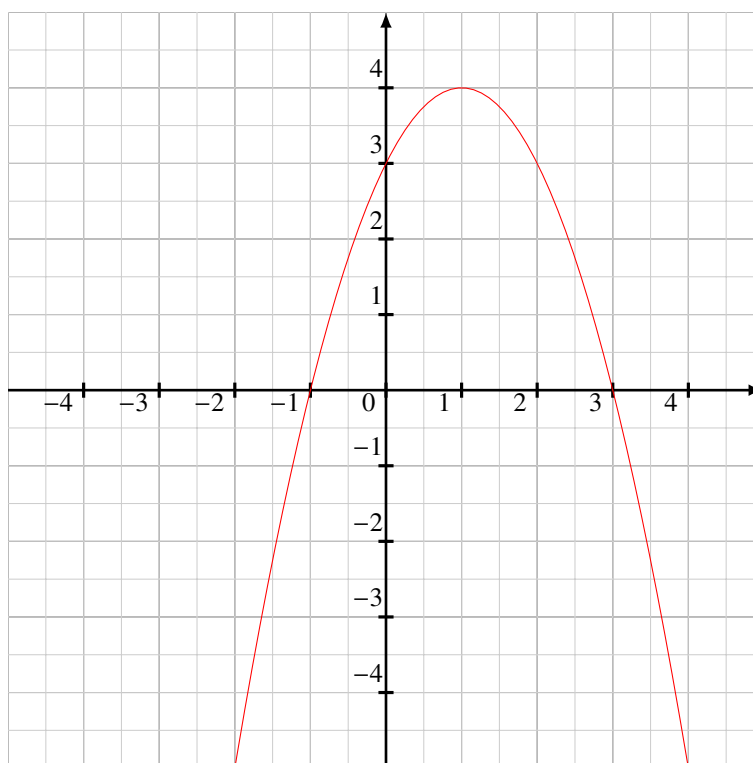
Exercice:

Donner le maximum et le minimum de la représentation graphique précédente sur les intervalles suivants:

- $[-4; 5]$
- $[-2; 1]$
- $[-3; -2]$

4 Exercice bilan

On considère la fonction $f : x \mapsto -(x + 1)(x - 3)$ définie sur $[-5; 5]$. La courbe représentative C_f est donnée ci-dessous.



1. Répondre graphiquement aux questions suivantes:
 - a. Déterminer l'image de 1 par f .
 - b. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
 - c. Résoudre l'inéquation $f(x) > 2$.
2. Reprendre les questions précédentes par le calcul.
3. Etablir le tableau de signe de f .
4. Etablir le tableau de variation complet de f .
5. En déduire le maximum de f sur son intervalle de définition.