Chapitre 8 : Notions de vecteurs, coordonnées, somme

Table des matières

Contenu

- Vecteur $\overrightarrow{MM'}$ associé à la translation qui transforme M en M'. Direction, sens et norme.
- Égalité de deux vecteurs. Notationu $\overrightarrow{u}$. Vecteur nul.
- Somme de deux vecteurs en lien avec l'enchaînement des translations. Relation de Chasles.
- Base orthonormée. Coordonnées d'un vecteur. Expression de la norme d'un vecteur.
- Expression des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ en fonction de celles de A et de B.

1 Vecteurs du plan

1.1 Introduction aux vecteurs

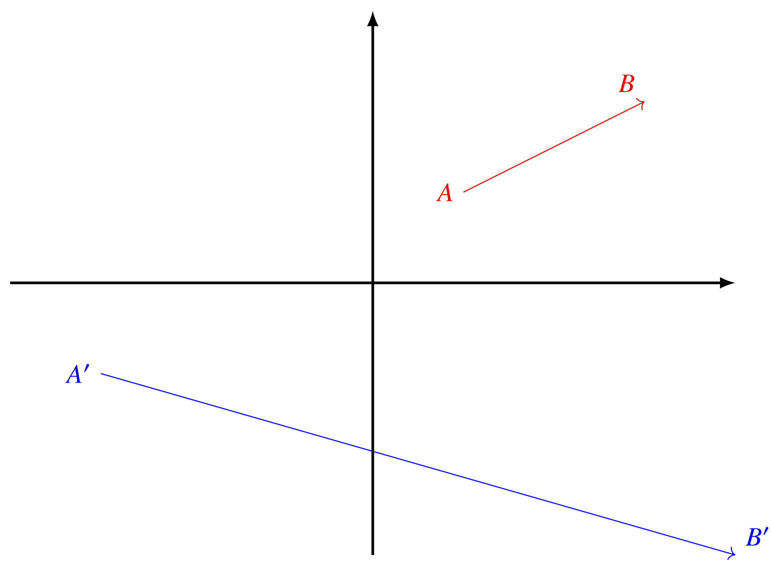
Définition:
On appelle vecteur $\overrightarrow{u}$ associé à une translation, un segment orienté caractérisé par:

- Sa direction (orientation de la droite).
- Son sens (direction de la flèche).
- Sa norme (longueur du segment noté $||\overrightarrow{u}||$).

Pour faire simple, un vecteur est un segment fléché dans le plan. De manière plus pratique en géométrie, les vecteurs servent à caractériser des "déplacements".

Définition:
Soient A et B deux points distincts quelconques du plan. La translation de A (l'origine) vers B (l'extrémité) est caractérisé par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ où:

- Sa direction est la droite (AB).
- Son sens va de A vers B.
- Sa norme est la longueur AB.



Remarque

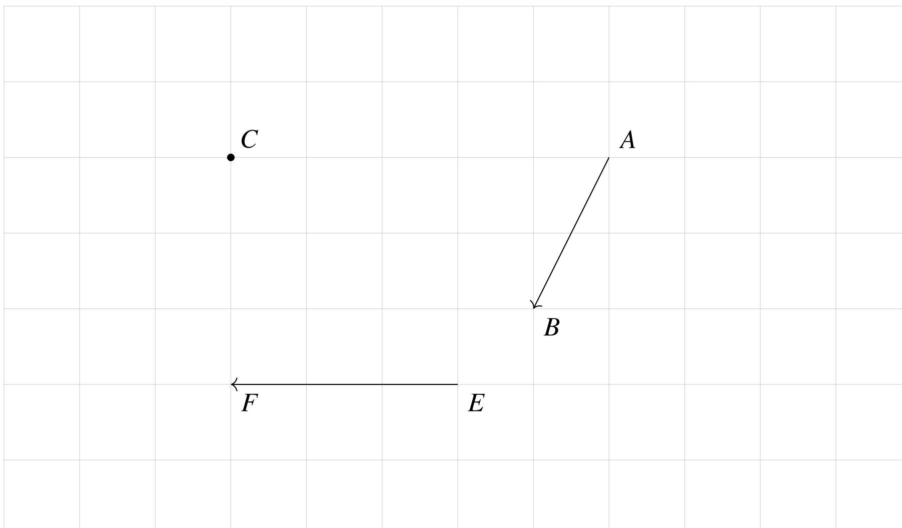
- Le vecteur qui ne "déplace" pas de point est appelé le vecteur nul et est noté $\overrightarrow{0}$. Par exemple $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.
- On dit que deux vecteurs sont égaux s'ils ont les mêmes caractéristiques (orientation, sens et norme).

1.2 Egalité de vecteurs, représentant

Définition:
L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme le point C au point D.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ possèdent la même direction, longueur et le même sens.

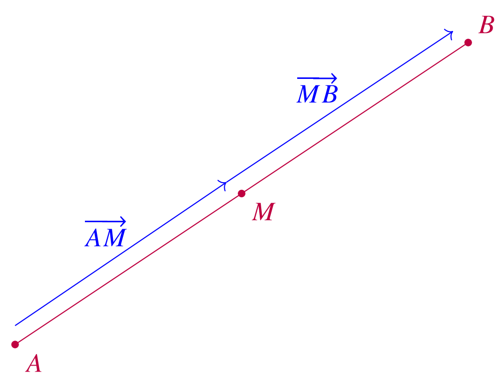
Exercice:
Construire les points suivants :

- D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- G tel $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CG}$



Propriété:
On a que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ si et seulement si M est le milieu du segment $[AB]$.

Démonstration:
La démonstration est laissée au lecteur, celle-ci est assez intuitive :



Définition:
Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, on dit que $\overrightarrow{AB}$ est le représentant de $\overrightarrow{u}$ d'origine A.

1.3 Opération sur les vecteurs

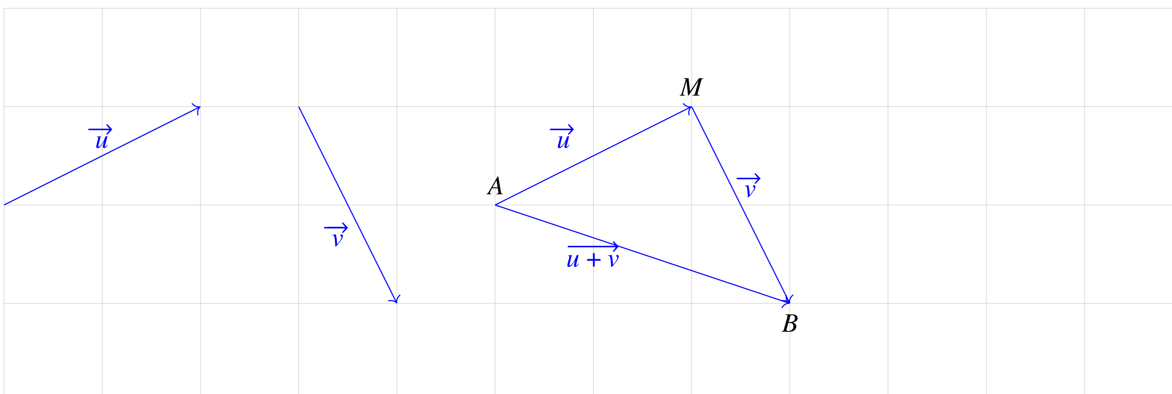
Définition: *Somme de vecteurs*
On considère deux translations définies par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Faire succesivement ces deux translations revient à effectuer une seule translation définie par le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$

Remarque

Pour faire graphiquement la somme de deux vecteurs, il faut que l'extrémité du premier vecteur soit l'origine du deuxième vecteur.

Exemple:

On construit le point B définit tel que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$:



Propriété: *Relation de Chasles* (IMPORTANT)

Soient A,B et C trois points quelconques du plan, on a la relation suivante : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Démonstration: *(Hors programme)*

Par définition on a que $\overrightarrow{AC}$ est l'unique vecteur tel que $C=A+\overrightarrow{AC}$.
Par ailleurs on a de même que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont les uniques vecteurs tels que $C=B+\overrightarrow{BC}$ et $B=A+\overrightarrow{AB}$. On a donc :
$C=B+\overrightarrow{BC}=A+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=A+\overrightarrow{AC}$.
On conclut donc par unicité des vecteurs.

Définition: *Vecteur opposé*
Soit un vecteur $\overrightarrow{u}$, on appelle vecteur opposé $\overrightarrow{u}$, noté $-\overrightarrow{u}$ le vecteur caractérisé par:

- La même direction que $\overrightarrow{u}$.
- La même norme que $\overrightarrow{u}$.
- Le sens opposé à $\overrightarrow{u}$.

Propriété:

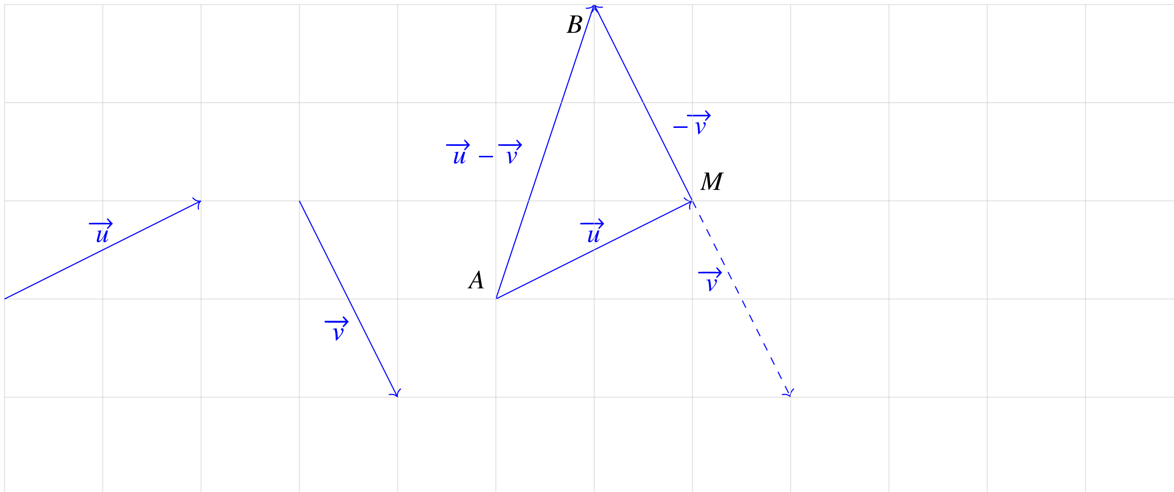
Soient A,B deux points quelconques du plan, on a la relation suivante : $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

Démonstration:

On a $\overrightarrow{0}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$ par relation de Chasles, d'où le résultat.

Exemple:

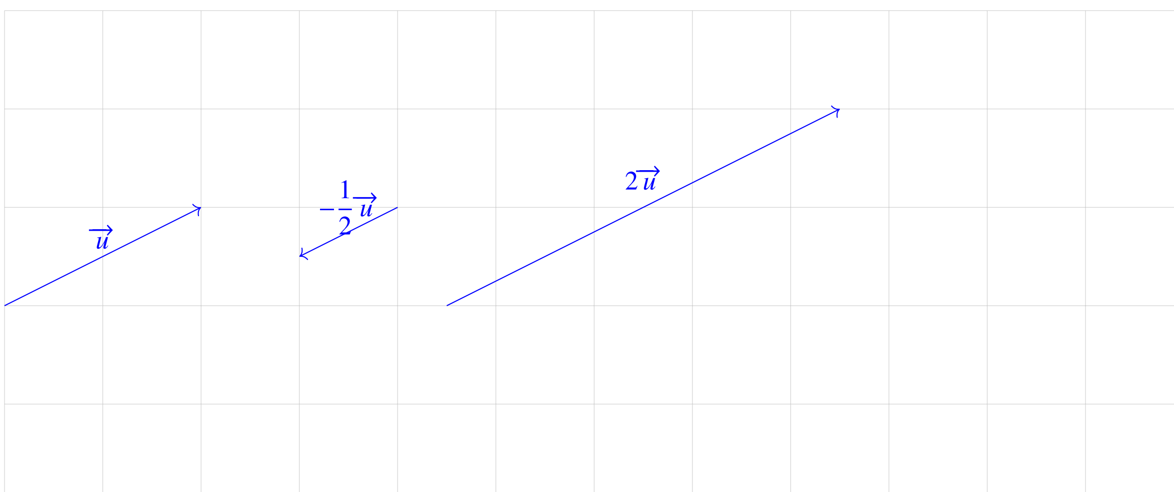
On construit le point B définit tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$:



Définition: *Multiplication par un réel*

Soit un vecteur $\overrightarrow{u}$ et un réel k, multiplier un vecteur par un scalaire revient à effectuer plusieurs translations successives.

- Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $k = 0$ alors $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $k > 0$ alors la direction est la même que $\overrightarrow{u}$ et la norme est $k||\overrightarrow{u}||$.
- Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $k < 0$ alors la direction est l'opposé de $\overrightarrow{u}$ et la norme est $-k||\overrightarrow{u}||$.



Propriété:

Soient k,k' deux réels et $\overrightarrow{u}$,$\overrightarrow{v}$ deux vecteurs quelconques, on a les relation suivante :

- $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$
- $(k + k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$
- $k(k'\overrightarrow{u}) = (kk')\overrightarrow{u}$
- $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Démonstration: *(Hors programme)*

Par définition d'un espace vectoriel.

2 Vecteurs dans un repère

On a déjà vu dans la précédente partie qu'un vecteur est un "déplacement" dans le plan et on a vu les premières opérations sur les vecteurs (addition, multiplication scalaire, ...). Par ailleurs, depuis le collège, on sait repérer un point du plan à partir de ses coordonnées. On va voir, dans cette partie, qu'il est également possible de repérer un vecteur par ses coordonnées.

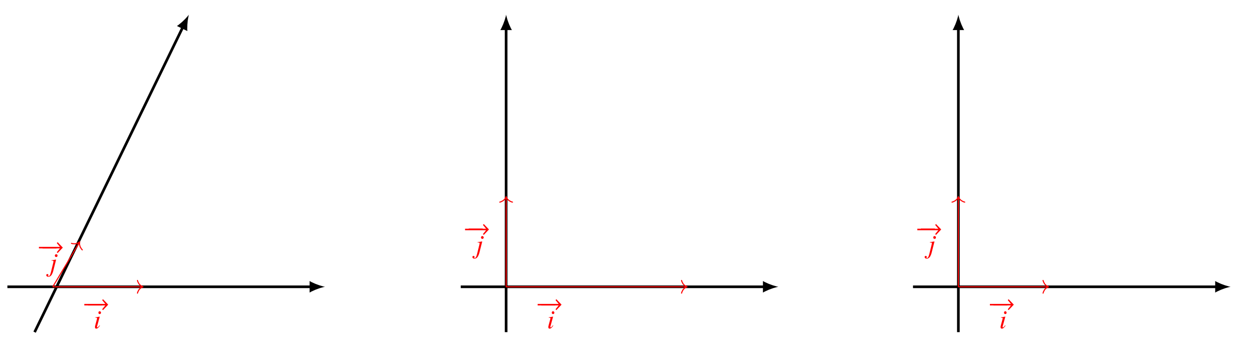
2.1 Repère vectoriel

Définition:
On appelle repère du plan la donnée de 3 points non alignés (O, I, J) où O est l'origine du repère, (OI) représente l'axe des abscisses et (OJ) l'axe des ordonnées.

On définira surtout le repère par $(O, I, J) = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}$

Remarque

- Un repère est dit orthogonal si les directions de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont perpendiculaires.
- Un repère est orthonormé si EN PLUS on a $||\overrightarrow{i}|| = ||\overrightarrow{j}||$



Repère quelconque | Repère orthogonal | Repère orthonormé

2.2 Coordonnées dans un repère

Définition:
On se place dans un repère (O, $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$).

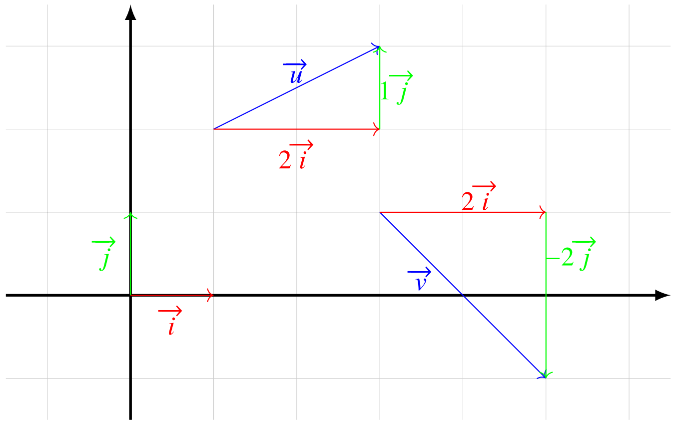
- Un point M a pour coordonnées $(x; y)$ dans ce repère signifie que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. On dira alors que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $\binom{x}{y}$.
- Un vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ dans ce repère signifie que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. On écrira alors $\overrightarrow{u} = \binom{x}{y}$

Remarque

Attention à ne pas confondre $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\dfrac{x}{y}$!

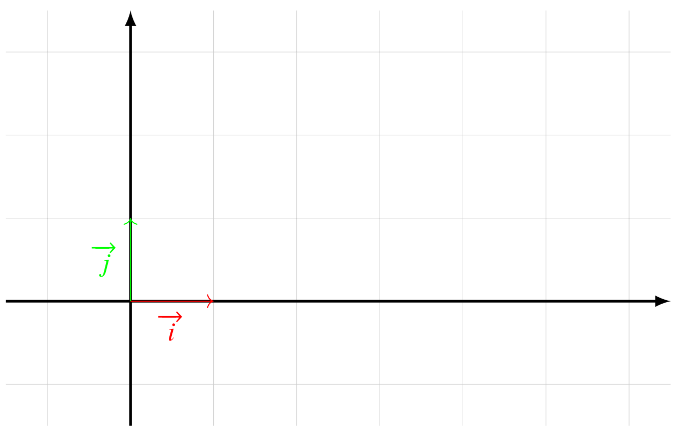
Exemple:

Dans le repère ci-dessous on a $\overrightarrow{u} = \binom{2}{1}$ et $\overrightarrow{v} = \binom{2}{-2}$.



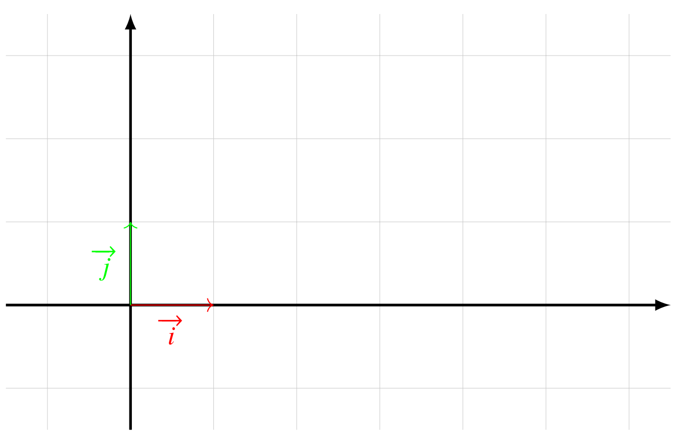
Exercice:

Soit un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, représenter les vecteurs $\overrightarrow{u} = \binom{3}{-1}$ et $\overrightarrow{v} = \binom{-2}{-2}$.



Exercice:

Soit un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, représenter les points A(4,1) ; B(-1,2) et déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



En reprenant l'exemple précédent, on peut directement calculer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sans avoir à représenter les points A,B et "compter les carreaux". On a plus simplement :

Propriété:

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
On a les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ =point d'arrivée - point de départ

Démonstration: *(Hors programme)*
Par définition $\overrightarrow{AB}$ est l'unique vecteur tel que $B - A = \overrightarrow{AB}$.

On a déjà vu qu'on pouvait effectuer des calculs sur des vecteurs (addition, multiplication scalaire...). On peut transposer les résultats précédents en utilisant le formalisme des coordonnées de vecteurs.

Propriété:

Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et k un réel quelconque. On a:

- $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.
- Les coordonnées du vecteur somme sont $\overrightarrow{u+v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.
- Les coordonnées du vecteur multiplié sont $k\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Démonstration: *(Hors programme)*
Par définition d'un espace vectoriel.

Exercice:
Soient les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u+v}$ et $7\overrightarrow{v}$.

On a également vu dans le dernier cours sur les vecteurs qu'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est caractérisé par sa longueur $||\overrightarrow{u}||$.

Propriété:

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ on a :
La norme du vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est donnée par $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Démonstration: *(Hors programme)*
$||.||$ est bien une norme car défini-positif, homogène et respecte bien l'inégalité triangulaire.

Exercice:
Soient deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. Déterminer la distance AB.

Grâce à cette notion de norme vectorielle et donc de distance, on peut démontrer la nature de polygones.

Méthode:

- Pour un Triangle :
  - On calcule les longueurs des 3 côtés. On regarde s'il est équilatéral, isocèle ou quelconque.
  - S'il est isocèle ou quelconque, on regarde s'il est rectangle par le théorème de Pythagore.
- Pour un Quadrilatère :
  - On calcule les longueurs de 2 côtés opposés.
    - Si elles sont égales, alors c'est un parallélogramme et donc on calcule les longueurs de 2 côtés consécutifs.
    - Si elles sont égales alors c'est un losange.
  - On calcule la longueur de la diagonale puis on applique le théorème de Pythagore.
    - Si on a un angle droit et que c'est un losange alors c'est un carré.
    - Si on a un angle droite et que ce n'est pas un losange alors c'est un rectangle.
- Pour un Cercle :
  Un cercle est définit par son centre O et son rayon r. Un point A appartient au cercle si on a OA = r

3 Exercice bilan

Soient $A(5;2)$, $B(-4;3)$, $C(1;2)$.

1. Déterminer la nature du triangle ABC.
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Déterminer les coordonnées du point E tel que :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$