Chapitre 10 : Colinéarité de vecteurs, déterminant

Table des matières

Contenu

- Produit d'un vecteur par un nombre réel. Colinéarité de deux vecteurs.
- Déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormée, critère de colinéarité. Application à l'alignement, au parallélisme.

1 Définition de colinéarité de deux vecteurs

Définition:
On dit que deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction.

Propriété:
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.

Remarque

- k s'appelle le coefficient de colinéarité.
- Si $k \neq 0$ on a également, $\overrightarrow{v} = \frac{1}{k}\overrightarrow{u}$.

Exercice:
Soient 6 points A,B,C,D,E,F avec $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AB}$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.

Propriété:

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Les trois points A,B,C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Démonstration:
La démonstration repose sur le principe de vecteur directeur étudié au chapitre : Equations de droites

2 Critère de colinéarité

Défintion/Propriété:

- On appelle déterminant de deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x, y)$,$\overrightarrow{v}(x', y')$ la donnée det($\overrightarrow{u}$,$\overrightarrow{v}$)= $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$
- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Démonstration:

- Supposons que deux vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires.
  On a alors qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $x' = kx$ et $y' = ky$, d'où :
  $\det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = xy' - x'y = kxy - kxy = 0$.

- Supposons que le déterminant de deux vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ non indentiquement nuls est nul.

  On a alors $y' = x'\dfrac{y}{x}$, d'où $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ x'\dfrac{y}{x} \end{pmatrix} = \dfrac{x'}{x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\overrightarrow{u}$.

<u>Exercice:</u>
Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

- $\overrightarrow{u} = \binom{2}{4}$ et $\overrightarrow{v} = \binom{-1}{-2}$
- $\overrightarrow{w} = \binom{1}{-3}$ et $\overrightarrow{z} = \binom{-3}{-9}$

<u>Méthode</u>:

- Pour déterminer si 3 points A,B,C sont alignés.
  - Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
  - Calculer leur déterminant et regarder s'il est nul.
- Pour déterminer si 2 droites (AB), (CD) sont parallèles.
  - Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
  - Calculer leur déterminant et regarder s'il est nul.

3 Exercice bilan

<u>Exercice</u>:

1. Les 3 points $A(1;2)$, $B(-1;6)$, $C(2;0)$ sont-ils alignés ?
2. Sur l'écran d'un contrôle aérien, on repère un avion A au point de coordonnées $A_1(25,18)$ et un avion B au point de coordonnées $B_1(183,57)$. Quelques minutes plus tard, on repère l'avion A au point de coordonnées $A_2(38,47)$ et l'avion B au point de coordonnées $B_2(-51,-465)$. Y a-t-il un risque de collision entre les deux avions ?