Chapitre 12 : Equations de droites

Table des matières

Contenu

- Vecteur directeur d'une droite.
- Équation de droite : équation cartésienne, équation réduite.
- Pente (ou coefficient directeur) d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

1 Vecteur directeur

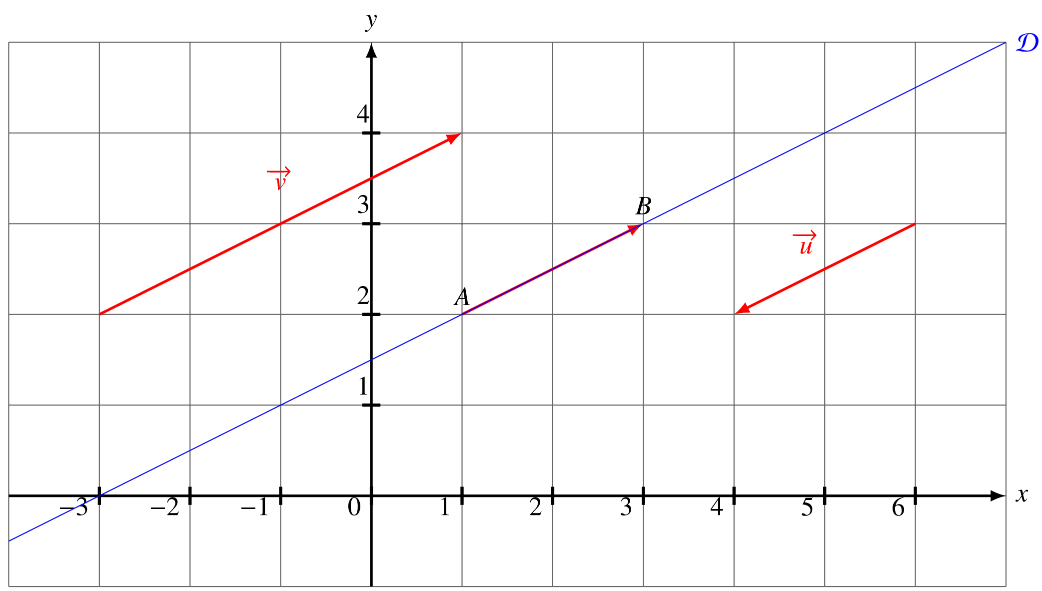
Définition:
Soit une droite $\mathcal{D}$ du plan et deux points A,B de cette droite.
On appelle vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite $\mathcal{D}$ tout vecteur non nul colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$

Remarque IMPORTANTE

- Il n'y a pas unicité du vecteur directeur !
- Deux droites parallèles ont la même direction, un vecteur directeur de l'une est vecteur directeur de l'autre.

Exemple:

Dans le repère ci-dessous, les vecteurs $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de la droite $\mathcal{D}$.



2 Equations de droites

Définition/Propriété:
Soit $\mathcal{D}$ une droite quelconque du plan.
Un point $M(x; y)$ est sur la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si il vérifie une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Une telle équation s'appelle équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$.

Démonstration:
Une droite $\mathcal{D}$ est définie par deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. On a que $M(x; y)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si les points A, B et M sont alignés.
C'est-à-dire qu'on a :

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 &\iff \begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff (x - x_A)(y_B - y_A) + (y - y_A)(x_B - x_A) = 0 \\
&\iff (y_B - y_A)x + (x_B - x_A)y + x_A(y_A - y_B) + y_A(x_A - x_B) = 0 \\
&\iff ax + by + c = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Remarque

Il n'y a pas unicité de l'équation cartésienne !

Propriété fondamentale:

Une équation d'une droite $\mathcal{D}$ est $ax + by + c = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

Démonstration:
Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points de la droite $\mathcal{D}$. $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}) = 0 &\iff \begin{vmatrix} b & x_B - x_A \\ -a & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff b(y_B - y_A) - a(x_B - x_A) = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

Or A et B appartiennent à la droite $\mathcal{D}$
D'où $ax_A + by_A + c = 0$ et $ax_B + by_B + c = 0$
D'où le résultat.

Remarque

On peut ainsi définir une droite par un point et un vecteur directeur.

Exercice:
Dans le plan muni d'un repère (O, I, J). On considère les points $A(-4, 3)$,$B(-2, 1)$,$C(3, 2)$ et un vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
- Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par C et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

- Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_2$ passant par C et parallèle à la droite (AB).

Exercice:
Donner le vecteur directeur des équations suivantes:

- $2x + 5y - 15 = 0$
- $x + 3y - 2 = 0$
- $y + 3x - 2 = 0$

On a donc su définir une droite algébriquement par une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$. En manipulant cette expression on peut trouver le résultat suivant :

Propriété:
Toute droite du plan a une équation de la forme $x = k$ ou $y = mx + p$.

Démonstration:
On a déjà vu que l'équation d'une droite pouvait s'écrire sous la forme $ax + by + c = 0$.

- **Si** $b = 0$**:**
On a $ax + c = 0 \iff x = -\frac{c}{a} = k$
- **Si** $b \neq 0$**:**
On a $y = \frac{-ay - c}{b} = my + p$

On définit alors un autre type d'équation représentative d'une droite :

Définition:
L'équation réduite d'une droite est :

- $x = k$
- $y = mx + p$, où m est le coefficient directeur de la droite et p l'ordonnée à l'origine.

Exemple:
On considère la droite $6x + 4y - 10 = 0 \iff y = -1,5x + 2,5$.

! Remarque

- Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
- Le vecteur directeur d'une équation réduite est $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

On a déjà vu qu'une équation de la forme $y = mx + p$ est la représentation graphique d'une fonction affine que l'on sait représenter en connaissance de m et p.

Exercice:

- Equation réduite d'une droite $\mathcal{D}$ passant par un point A et de coefficient directeur m donné :
  $A(3,-1)$, $m = -4$; $A(5,-3)$, $m = 0$; $A(\frac{3}{4}, \frac{5}{2})$, $m = \frac{2}{3}$
- Equation réduite d'une droite passant par deux points A et B :
  $A(2,3)$, $B(6,6)$; $A(3,-1)$, $B(3,-2)$; $A(1, \frac{7}{2})$, $B(-3, -\frac{21}{2})$
- Equation réduite d'une droite $\mathcal{D}$ passant par un point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ donné :
  $A(2,0)$, $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $A(1,-1)$, $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
- Tracer dans un repère orthonormé les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$ suivantes :
  $\mathcal{D}_1 : y = 2x - 1$; $\mathcal{D}_2 : y = -x + 4$; $\mathcal{D}_3 : y = 3x - 2,5$; $\mathcal{D}_4 : y = \frac{1}{2}x + 1$

3 Parallèlisme et systèmes linéaires

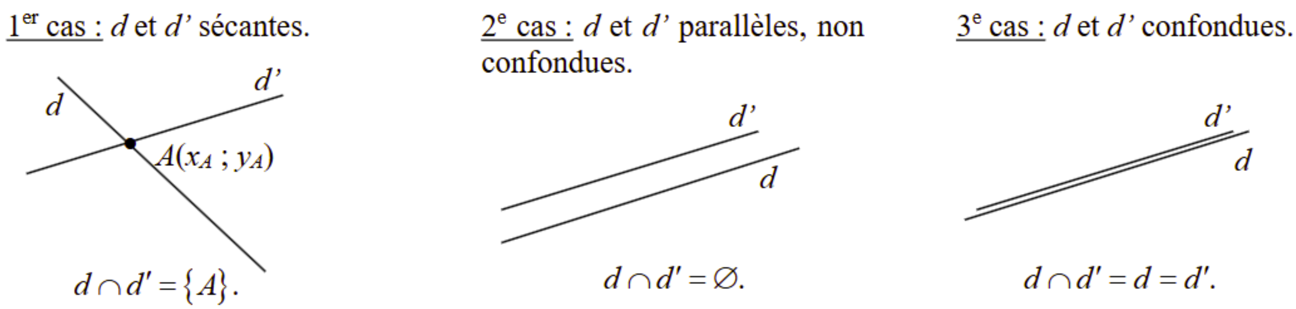
On a vu que deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont un vecteur directeur en commun, en d'autres termes on a :

Propriété:
Dans un repère (O, I, J), deux droites $\mathcal{D} : y = mx + p$ et $\mathcal{D}' : y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur : $m = m'$.
Elles sont par ailleurs confondues si on a en plus $p = p'$.

Démonstration:
Considérer un vecteur directeur de ces deux droites puis se rappeler que deux droites sont parallèles si et seulement si leur vecteurs directeurs sont colinéaires.
Exemple:
Les droites d'équations $y = \frac{2}{3}x + 4$ et $y = \frac{54}{81}x - 5$ sont parallèles car on a $\frac{2}{3} = \frac{54}{81}$.

On peut donc déterminer si deux droites sont parallèles confondues ou sécantes uniquement par le calcul et sans représentation graphique.

En effet, par définition, deux droites parallèles ne se croisent jamais et deux droites sécantes se rencontrent en un unique point. Donc déterminer si deux droites $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ et $\mathcal{D}' : a'x + b'y + c' = 0$ sont sécantes, c'est déterminer un point $M(x, y)$ solution des deux équations.



On s'intéresse donc à la résolution simultanée de deux équations :

Définition:
Soit $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$, $(S) : \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ est un système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y appelé système linéaire. Résoudre (S) consiste à déterminer tous les couples (x, y) de réels qui vérifient les deux équations en même temps.

Exemple:
On considère le système : $(S_1) : \begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0 \\ -x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$ le couple $(2, -1)$ est solution mais le couple $(4, 4)$ ne l'est pas.

Méthode:
Il y a deux méthodes pour résoudre un système linéaire :

- par combinaison : On garde une des deux équations (celle qui semble a priori la plus facile à manipuler) et on combine les deux équations à l'aide de coefficients multiplicatifs afin de faire disparaître une des deux inconnues. La deuxième équation obtenue (par combinaison) est alors une équation du premier degré qui donne la valeur d'une des inconnues. On détermine la valeur de la deuxième à l'aide de l'équation qu'on a gardée
- par substitution : On exprime une des deux inconnues en fonction de l'autre à l'aide d'une des deux équations et on la remplace dans l'autre équation afin d'obtenir une équation du premier degré ; on résout celle-ci pour obtenir la valeur de la première inconnue et on détermine la valeur de la deuxième à l'aide de l'expression du début.

Il y a trois résultats possibles : soit il n'y a qu'une seule solution (la méthode aboutit), soit il n'y a pas de solution (on arrive à une absurdité), soit il y a une infinité de solutions (on arrive à une égalité évidente)

Exercice:
Résoudre les systèmes suivant :

- $(S_1) : \begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0 \\ -x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$
- $(S_2) : \begin{cases} 2x - 4y + 6 = 0 \\ -3x + 6y - 9 = 0 \end{cases}$
- $(S_3) : \begin{cases} 2x - 4y + 4 = 0 \\ -3x + 6y - 9 = 0 \end{cases}$

4 Exercice bilan

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par les points $A(2;-3)$ et $B(5;6)$. En déduire un vecteur directeur.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point $C(-2;5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.
3. Représenter graphiquement dans un repère les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ définies par les équations suivantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection :

$$\mathcal{D} : y = 3x - 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' : y = -5x + 2$$