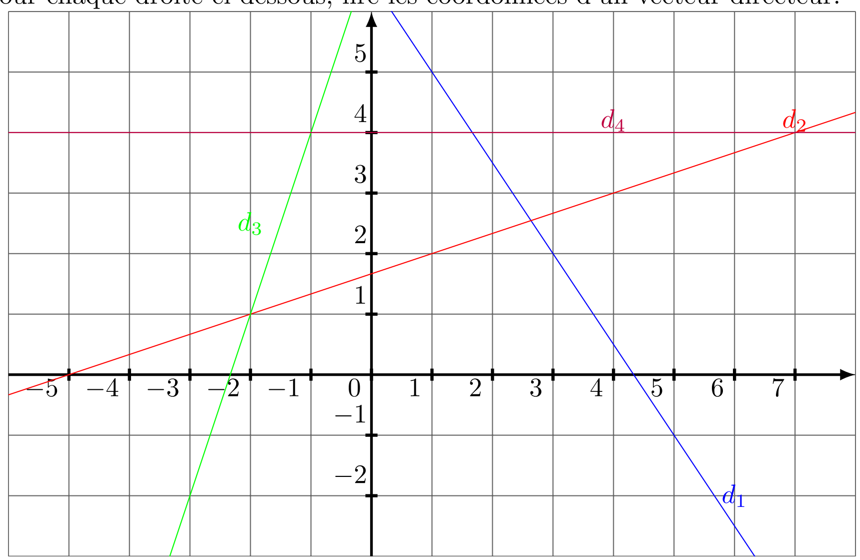
1 Equations de droites

1.1 Compétences Attendues

- Déterminer une équation cartésienne de droite à partir de deux points, un point et un vecteur directeur
- Déterminer un vecteur directeur d'une droite donnée par une équation cartésienne
- Déterminer une équation réduite de droite à partir de deux points, un point et un vecteur directeur ou un point et la pente.
- Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues, déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.
- Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes.

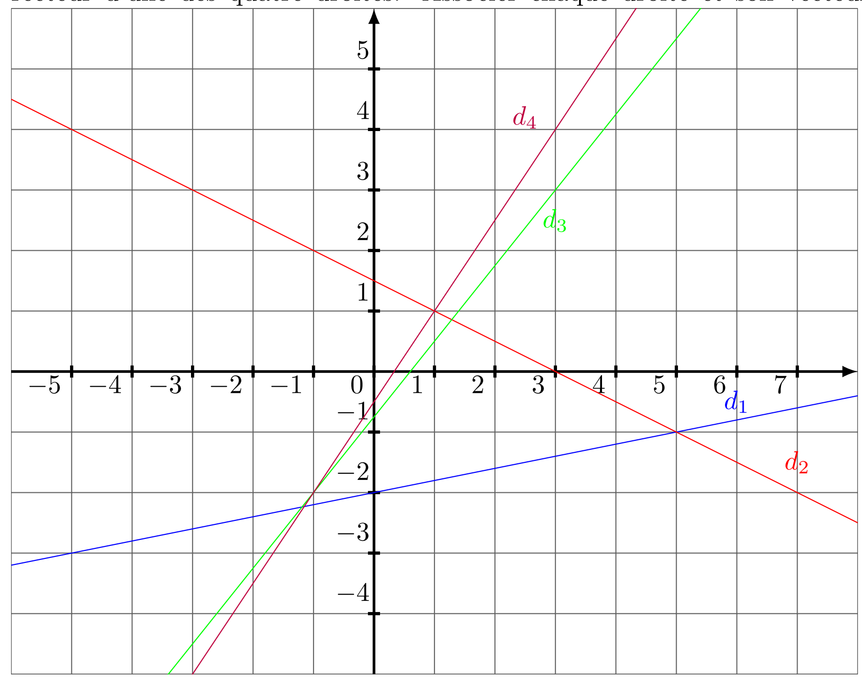
1.2 Exercices

Exercice 1:
Pour chaque droite ci-dessous, lire les coordonnées d'un vecteur directeur.



Exercice 2:
On considère un point $A(4;3)$. Tracer quatre droites d_1 à d_2 passant par A et admettant respectivement pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_4} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$.

Exercice 3:
On a tracé quatre droites d_1 à d_2. On donne les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix}-2\\5,5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix}16\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_4} = \begin{pmatrix}1\\0,6\end{pmatrix}$. Chaque vecteur est un vecteur directeur d'une des quatre droites. Associer chaque droite et son vecteur directeur.



Exercice 4:
Dans chacun des cas suivants, indiquer si le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

1. $A(-7;3)$; $B(5;1)$ et $\overrightarrow{u}(-6;1)$
2. $A(5;2)$; $B(0;-3)$ et $\overrightarrow{u}(2;-2)$
3. $A(4;-2)$; $B(3;-4)$ et $\overrightarrow{u}(4.5;9)$

Exercice 5:
Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthogonal. Déterminer, s'il existe et en l'expliquant, le coefficient directeur de la droite (AB).

1. Avec $A(-5;-1)$ et $B(-5;3)$.
2. Avec $A(0;0)$ et $B(3;-2)$.
3. Avec $A(0;-3)$ et $B(-2;-3)$.

Exercice 6:
Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points A et B.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) dans chacun des cas suivants.

1. Avec $A(5\,;\,3)$ et $B(4\,;\,4)$.
2. Avec $A(-2\,;\,1)$ et $B(-1\,;\,3)$.
3. Avec $A(-1\,;\,0)$ et $B(-5\,;\,4)$.
4. Avec $A(-2\,;\,-5)$ et $B(0\,;\,2)$.

Exercice 7:

1. Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite (d) qui passe par le point A de coordonnées $(1\,;\,3)$ et qui a le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (d).
2. Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite (d) qui passe par le point A de coordonnées $(5\,;\,5)$ et qui a le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (d).
3. Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite (d) qui passe par le point A de coordonnées $(0\,;\,-4)$ et qui a le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (d).
4. Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite (d) qui passe par le point A de coordonnées $(4\,;\,-2)$ et qui a le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (d).

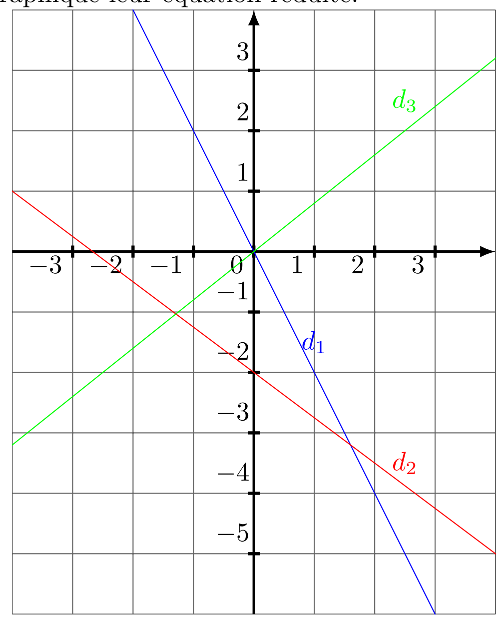
Exercice 8:
Soit $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ un repère orthogonal.
Déterminer une équation réduite de chaque droite (AB) avec les points A et B de coordonnées suivantes.

1. $A(2;-1)$ et $B(1;-2)$
2. $A(5;-5)$ et $B(4;0)$
3. $A(-4;0)$ et $B(3;4)$
4. $A(-4;1)$ et $B(-1;2)$

Exercice 9:
Soit $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ un repère orthogonal.
Déterminer une équation réduite de chaque droite (d) passant par le point A et ayant le vecteur $\vec{u}$ comme vecteur directeur puis tracer cette droite. A et $\vec{u}$ ont les coordonnées suivantes.

1. $A(3;-5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$
2. $A(1;0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$
3. $A(-2;5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$
4. $A(1;-5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

Exercice 10:
À partir de la représentation graphique des droites ci-dessous, donner par lecture graphique leur équation réduite.



Exercice 11:
Soit $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ un repère orthogonal. Déterminer si les 3 points A, B et C suivants sont ou non alignés.

1. $A(-2;-3)$; $B(-1;-3)$ et $C(0;-3)$.
2. $A(-5;2)$; $B(-4;3)$ et $C(-4;0)$.
3. $A(2;3)$; $B(-1;-4)$ et $C(-5;3)$.
4. $A(3;3)$; $B(2;-4)$ et $C(0;-18)$.

Exercice 12:

1. Dans un repère orthonormé du plan, on considère le point $A(1\,;\,0)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point A et ayant pour coefficent directeur -2.

2. Dans un repère orthonormé du plan, on considère le point $A(0\,;\,-3)$.
   Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point A et ayant pour coefficent directeur 2.

Exercice 13:
Dans chacun des cas suivants :

- Déterminer une équation cartésienne de la droite d parallèle à (AB) et passant par C
- Tracer d

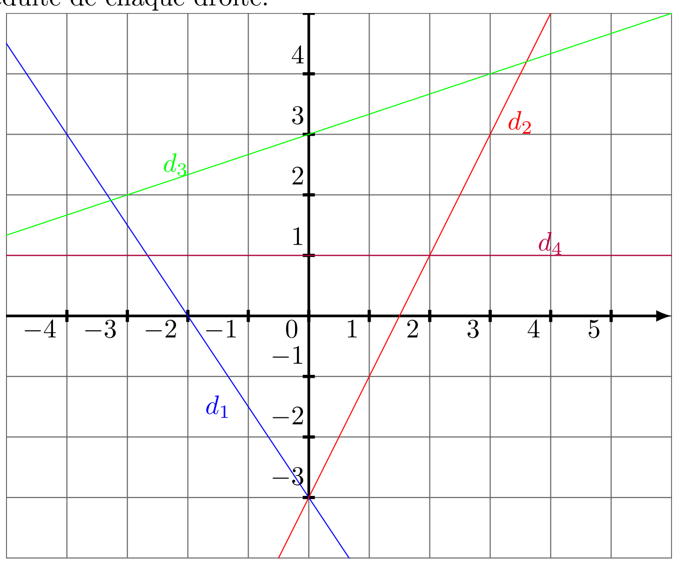
1. $A(-1;2)$; $B(3;4)$ et $C(3;-1)$
2. $A(2;-3)$; $B(-1;2)$ et $C(-1;-1)$

Exercice 14:
Dans chacun des cas suivants :

- Déterminer l'équation réduite de la droite d parallèle à d' et passant par A
- Tracer d

1. $A(2;3)$ et $d' : y = -2x - 1$
2. $A(-3;4)$ et $d' : y = \dfrac{1}{4}x + 1$

Exercice 15:
Par lecture graphique, préciser le coefficient directeur puis donner une équation réduite de chaque droite.



Exercice 16:
Déterminer si les droites (d) et (d'), dont on donne, ci-dessous, des équations cartésiennes, sont parallèles, confondues ou sécantes.

1. On donne : $(d) : -7x - 6y + 5 = 0$ et $(d') : 28x + 24y + 5 = 0$
2. On donne : $(d) : 5x - y - 2 = 0$ et $(d') : -2x - 2y - 4 = 0$
3. On donne : $(d) : 7x + 7y - 7 = 0$ et $(d') : 4x + y + 6 = 0$

Exercice 17:
Déterminer si le couple proposé est solution du système d'équations.

1. Le couple $(-8;-9)$ est-il solution du système $\begin{cases} x - 3y = 21 \\ 4x + 4y = -76 \end{cases}$?
2. Le couple $(-8;2)$ est-il solution du système $\begin{cases} 5x - 5y = -50 \\ 6x + 2y = -44 \end{cases}$?

Exercice 18:
Résoudre les systèmes d'équations suivants par combinaison linéaire :

1. $\begin{cases} -6x + y = 56 \\ 4x + 4y = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 22x + 7y + 6 = 19x + 5y + 4 \\ 5x - 5y + 5 = 7x - 12 \end{cases}$

Exercice 19:
Résoudre les systèmes suivants par substitution :

1. $\begin{cases} -3y = -3x + 3 \\ y = 4x + 17 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = -3y + 16 \\ 2x = -2y \end{cases}$

Exercice 20:
Résourdre les problèmes suivants :

1. Le périmètre d'un terrain rectangulaire vaut 118 m. Si on augmente la largeur d'un terrain rectangulaire de 10 m et on diminue la longueur de 10 m, l'aire du terrain augmente de 190 m^2. Déterminer les mesures du terrain ?

2. On doit répartir des élèves dans des groupes pour une excursion. Si on met 155 élèves par groupe, alors on au besoin de 5 groupes de moins que si on met 62 élèves par groupe. Combien d'élèves y a-t-il ?

Exercice 21:
Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère les points $A(-3;5)$,$B(9;2)$ et $C(2;0)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Montrer que C n'appartient pas à la droite (AB).
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par C et de coefficient directeur $\dfrac{7}{2}$.
4. Déterminer les coordonées du point d'intersection M de cette droite d avec la droite (AB).
5. Déterminer l'abscisse du point d'intersection P de la droite (AB) avec l'axe des abscisses.

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 22:
Que fait l'algorithme Python ci-dessous ?

```python
xA=float(input("xA="))
yA=float(input("yA="))
xB=float(input("xB="))
yB=float(input("yB="))
if xA==xB:
    print("La droite est verticale")
else:
    m=(yB-yA)/(xB-xA)
    print("Le coefficient directeur de la droite est :",m)
```

Exercice 23:
Justifier que le programme Python ci-dessous donne une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite (AB).

```python
xA=float(input("xA="))
yA=float(input("yA="))
xB=float(input("xB="))
yB=float(input("yB="))
a=yB-yA
b=xA-xB
c=-xA*yB+xB*yA
print("a=",a)
print("b=",b)
print("c=",c)
```

1.4 Approfondissements

Exercice 24:
$ABCD$ est un carré. On cherche où sont les points M tels que les triangles ABM et BCM ont la même aire.

1. Quand M est à l'intérieur du carré, déterminer où doivent se trouver tous les points M pour que les aires soient égales.
2. Quand M est à l'extérieur du carré, on se place dans le repère, (A,B,D) et on note $M(x;y)$.
   (a) Démontrer que les aires sont égales si et seulement si $y^2 = (1-x)^2$.
   (b) En déduire que l'ensemble cherché est la réunion de deux droites.
   (c) Construire cet ensemble.

Exercice 25:
On considère le système suivant :

$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{rcr} 2x^2 - y & = & 3 \\ -3x^2 + 2y & = & -5 \end{array} \right.$$

1. En posant $X = x^2$, résoudre le système avec les inconnues X et y.
2. En déduire les solutions du système avec les inconnues x et y.
3. Dans chacune des équations, isoler y et en déduire une interprétation graphique de ce système.
4. En utilisant la même méthode, résoudre le système :

$$(S_2) : \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{3}{x} - 2y & = & 1 \\ 3y - \dfrac{2}{x} & = & 1 \end{array} \right.$$

et interpréter graphiquement ses solutions.