Chapitre 0 : Rappels généraux

Table des matières

1 Calcul numérique

Méthode: *Calcul de fractions*

- Additionner deux fractions, c'est d'abord les mettre au même dénominateur.
- Multiplier deux fractions, c'est multiplier les numérateurs entres eux et les dénominateurs entres eux.
- Diviser deux fractions, c'est multiplier la première fraction par l'inverse de l'autre.

Exercice :
Calculer les fractions suivantes :

- $\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{4}$
- $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{4}$
- $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{4}}$

Méthode: *Calcul de puissances*
Soit a,b deux réels quelconques et n,m deux entiers relatifs.

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$

Exemple:

- $(-2)^4 \times (-2)^3 = (-2)^{4+3} = (-2)^7$
- $\frac{6^1}{6^{-3}} = 6^{1-(-3)} = 6^4$
- $(10^2)^3 = 10^6$

Méthode: *Calculs de racines carrées*
Soit a,b deux réels positifs.

- $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Exemple:

- $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$
- $\sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$

2 Calcul algébrique

2.1 Formules de distributivité

Méthode:
Soient a,b,c,d et k des réels quelconques, on a la formules suivantes :

- Simple distributivité : $k(a+b) = ka + kb$
- Double distributivité : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Exercice:
Exprimer les expressions suivantes sous forme développée.

- $5(x-2)$
- $x(x+1)$
- $(x-1)(x-2)$
- $(x^2+x)(x+1)$

2.2 Identités remarquables

Méthode:
Soient a,b deux réels quelconques, on a les formules suivantes:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Exercice:
En utilisant les identités remarquables, développer ou factoriser les expressions suivantes:

- $(x-2)^2$
- $x^2 - 36$
- $(x+3)^2$

2.3 Techniques de factorisation

Méthode:
On peut factoriser de deux manières différentes :

- En repérant un facteur commun.
  Exemple : $(3-x)(5x+4) - 2(3-x)(2x+1) = (3-x)((5x+4) - 2(2x+1)) = (3-x)(x+2)$
- En reconnaissant une identité remarquable.
  Exemple : $36x^2 - 100 = (6x)^2 - 10^2 = (6x+10)(6x-10)$

3 Equations

3.1 Equations du 1er degré

Méthode:
Pour résoudre une équation, on ”rassemble” les termes de même degré ensemble du même côté de l’égalité.
”Les x avec les x, les nombres avec les nombres”.

Exercice:
Résoudre l'équation $3x + 5 = 5x - 7$.

3.2 Equations produits

Méthode:

- Un produit de nombres réels est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Pour tout réel x,
  $A(x)B(x) = 0 \iff A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$
- Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul. Pour tout réel x,
  $\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \iff A(x) = 0$ et $B(x) \neq 0$

! Remarque

Les valeurs qui annulent le dénominateur sont appelées "valeurs interdites"

Exercice:
Résoudre les équations suivantes en précisant les éventuelles valeurs interdites.

- $(2x - 5)(6x + 1) = 0$
- $\dfrac{4x - 3}{x + 1}$

3.3 Systèmes de deux équations à deux inconnus

Définition:
Soit $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$, $(S) : \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ est un système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y appelé système linéaire. Résoudre (S) consiste à déterminer tous les couples (x, y) de réels qui vérifient les deux équations en même temps.

Exemple:
On considère le système : $(S_1) : \begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0 \\ -x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$
Le couple $(2, -1)$ est solution mais le couple $(4, 4)$ ne l'est pas.

Méthode:
Il y a deux méthodes pour résoudre un système linéaire :

- par combinaison : On garde une des deux équations (celle qui semble a priori la plus facile à manipuler) et on combine les deux équations à l'aide de coefficients multiplicatifs afin de faire disparaître une des deux inconnues. La deuxième équation obtenue (par combinaison) est alors une équation du premier degré qui donne la valeur d'une des inconnues. On détermine la valeur de la deuxième à l'aide de l'équation qu'on a gardée
- par substitution : On exprime une des deux inconnues en fonction de l'autre à l'aide d'une des deux équations et on la remplace dans l'autre équation afin d'obtenir une équation du premier degré ; on résout celle-ci pour obtenir la valeur de la première inconnue et on détermine la valeur de la deuxième à l'aide de l'expression du début.

Il y a trois résultats possibles : soit il n'y a qu'une seule solution (la méthode aboutit), soit il n'y a pas de solution (on arrive à une absurdité), soit il y a une infinité de solutions (on arrive à une égalité évidente)

Exercice:
Résoudre les systèmes suivant :

- $(S_1) : \begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0 \\ -x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$
- $(S_2) : \begin{cases} 2x - 4y + 6 = 0 \\ -3x + 6y - 9 = 0 \end{cases}$
- $(S_3) : \begin{cases} 2x - 4y + 4 = 0 \\ -3x + 6y - 9 = 0 \end{cases}$

4 Polynômes de degré 2

4.1 Résolution d'une équation du second degré

Définition:
Une équation du second degré est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Une solution de cette équation s'appelle une racine du trinôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$

Exemple:
Pour $x \in \mathbb{R}$, les équations $5x^2 + 3x - 2 = 0$ et $-3x^2 + 6x + 5 = 2x^2 - 3$ sont des équations du second degré.

Définition:
Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on appelle discriminant du trinôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$

Propriété:
Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et Δ le discriminant du trinôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c$ admet une unique solution $x_0 = -\frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Démonstration:
Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ qui peut s'écrire sous forme canonique : $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

- Si $\Delta < 0$ alors f est de signe constant donné par le signe de a et donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
- Si $\Delta = 0$ on a $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \iff x = -\frac{b}{2a}$ et donc l'équation $f(x)$ admet une unique solution.
- Si $\Delta > 0$ on a :

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{\Delta}{4a}}\right)^2 = \left(\sqrt{a}x + \frac{\sqrt{a}b}{2a} - \sqrt{\frac{\Delta}{4a}}\right)\left(\sqrt{a}x + \frac{\sqrt{a}b}{2a} + \sqrt{\frac{\Delta}{4a}}\right) = a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

D'où le résultat

Exercice:
Soit $x \in \mathbb{R}$, résoudre les équations suivantes :

- $2x^2 - x - 6 = 0$
- $2x^2 - 3x = -\frac{9}{8}$
- $2x^2 + 3x + 5 = x^2 - 5$

4.2 Factorisation d'un trinôme

Propriété:
Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et f une fonction polynômiale de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de forme factorisée.
- Si $\Delta = 0$, on a pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$, on a pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Démonstration:
La démonstration a été effectuée précédemment.

Exercice:
Exprimer, lorsque c'est possible, les fonctions polynômiales suivantes sous forme factorisée :

- $f : x \mapsto 2x^2 - x - 6$
- $g : x \mapsto 2x^2 - 3x + \frac{9}{8}$
- $h : x \mapsto x^2 + 3x + 10$

4.3 Signe d'un trinôme

Méthode:
Pour déterminer le signe d'un polynôme de degré 2, on l'exprime d'abord sous forme factorisée puis on étudie le signe de chaque facteur.

Exercice:
Etudier le signe des fonctions polynômiales suivantes :

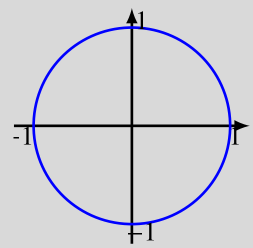
- $f : x \mapsto 2x^2 - x - 6$
- $g : x \mapsto 2x^2 - 3x + \frac{9}{8}$
- $h : x \mapsto x^2 + 3x + 10$

5 Trigonométrie

5.1 Cercle trigonométrique et radian

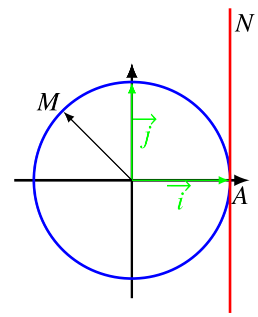
5.1.1 Le cercle trigonométrique

Définition:
Sur un cercle, on appelle sens trigonométrique (ou sens direct) le sens contraire des aiguilles d'une montre.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé et orienté dans le sens direct, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1.



5.1.2 Enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique

Dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orienté telle que $(A, \overrightarrow{j})$ soit un repère de la droite.
Si on "enroule" la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle.
La longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est ainsi égale à la longueur AN.



5.1.3 Le radian

Propriété:
La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π.

Ainsi, à un tour complet sur le cercle, on peut faire correspondre le nombre réel 2π. On définit alors un nouvelle unité d'angle: le radian, défini tel qu'un tour complet mesure 360° ou 2π radians.

Ainsi, à 2π radians (un tour complet), on peut faire correspondre un angle de 360°. Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes:

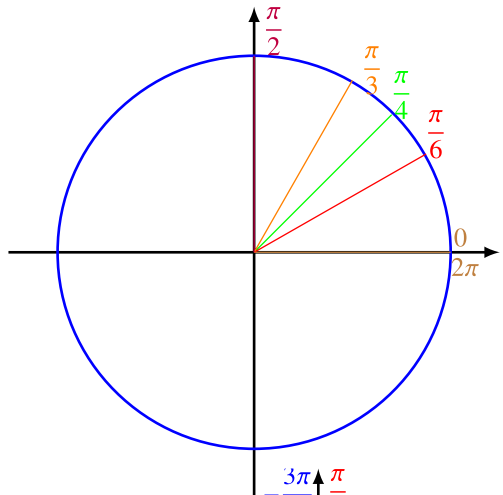
Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Exercice:
Donner la mesure en radians de l'angle de mesure 33° puis donner la mesure en degrés de l'angle de mesure $\frac{3\pi}{8}$ radians.

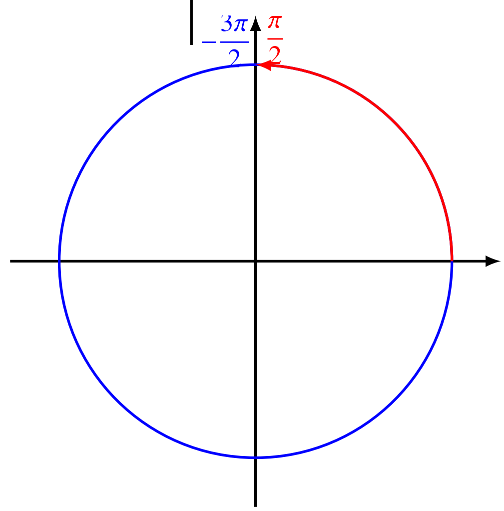
5.2 Mesure d'un angle orienté

5.2.1 Lire sur le cercle trigonométrique

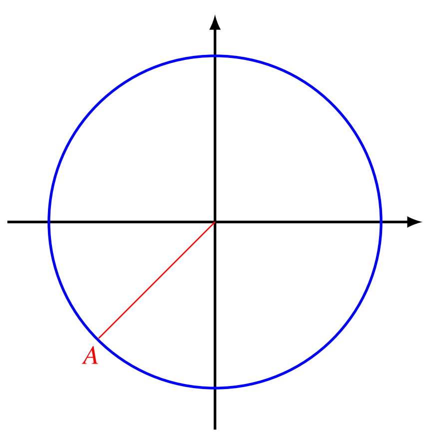
On représente par exemple ci-contre des mesures remarquables sur le cercle trigonométrique



Par exemple, $\frac{\pi}{2}$ correspond à l'angle droite, soit 90°. Il est également possible de faire la lecture dans l'autre sens (sens indirect), ce qui donne $-\frac{3\pi}{2}$. Les mesure $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{2}$ sont donc associées à un même point sur le cercle.
Comme la lecture s'effectue sur un cercle, il est également possible de faire plusieurs fois le tour.
On va donc avoir que $-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ ainsi que $\frac{5\pi}{2}$ sont associées à un même point sur le cercle trigonométrique (sans pour autant que ces mesures soient égales !).



<u>Exercice</u>:
Lire sur le cercle trigonométrique l'angle associé au point A sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ puis sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
Placer sur le cercle trigobométrique le point B associé à l'angle $\frac{9\pi}{4}$, le point C associé à l'angle $\frac{8\pi}{3}$ et le point D associé à l'angle $-\frac{9\pi}{2}$



5.2.2 Mesure pincipale d'un angle orienté

Nous avons vu qu'à un seul point on pouvait associer plusieurs valeurs d'angles. Nous allons en choisir une seule valeur que l'on va appeler le représentant.

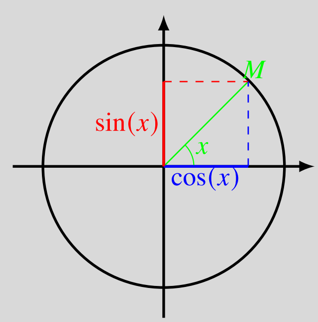
Définition:
La mesure principale d'un angle orienté est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Exemple:
Une mesure d'un angle est $\frac{7\pi}{4}$. D'autres mesures sont données par exemple par $\frac{7\pi}{4}-2=-\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}-4\pi=-\frac{9\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}-6\pi=-\frac{17\pi}{4}$...
$-\frac{\pi}{4}$ est la mesure principale de cet angle car c'est la seule comprise dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$

Exercice:
Donner la mesure principale de l'angle $\frac{27\pi}{4}$.

5.3 Cosinus et sinus d'un nombre réel

Définition:
Soit M le point du cercle trigonométrique associé au nombre x (qui est un angle orienté).
Le point M a pour coordonnées $(\cos(x);\sin(x))$.



Propriétés:
Soit $x\in\mathbb{R}$:

- $\cos(x)\in[-1;1]$
- $\sin(x)\in[-1;1]$
- $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$

5.4 Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(\mathbf{x})$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(\mathbf{x})$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Exercice:

Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ et de $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

Exercice:

Résoudre les équations suivantes :

- $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [0; 2\pi]$
- $\sin(x) = \frac{1}{2}, x \in [-\pi; \pi]$