Chapitre 1 : Fonctions de la variable réelle

Table des matières

1 Fonctions usuelles

1.1 Fonctions en escalier

Définition:
Une fonction en escalier est une fonction constante par intervalles.

Exemple:

On considère la fonction définie pour tout $x \in [-8;+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} -2 \text{ si } -8 \leq x < -2 \\ 6 \text{ si } -2 \leq x \leq 0 \\ 3 \text{ si } 0 < x < 4 \\ 1 \text{ si } 4 \geq x \end{cases}$ dont on donne la représentation graphique ci-dessous.

1.2 Fonctions affines

1.2.1 Définitions et premières propriétés

Définition:
Soient $(m,p) \in \mathbb{R}^2$, une fonction affine f est une fonction de la forme $f : x \mapsto mx + p$ où m est le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.

Exemple:
La fonction $f : x \mapsto 2x + 1$ est affine mais $f : x \mapsto 3x^2 - 5$ ne l'est pas.

Exemple:
Soit la fonction affine définie par $f : x \mapsto 5x + 2$, 5 est le coefficient directeur et 2 est l'ordonnée à l'origine

Remarque

Une fonction affine est simplement l'application du programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
- Multiplier par m
- Ajouter p

1.2.2 Sens de variation

Définition:
Soient $x_1 \leq x_2$ deux réels quelconques et f une fonction affine.

- f est dite croissante si $f(x_1) \leq f(x_2)$ c'est-à-dire qu'elle conserve l'ordre.
- f est dite décroissante si $f(x_1) \geq f(x_2)$ c'est-à-dire qu'elle renverse l'ordre.

Exemple:
La fonction $f : x \mapsto 3x + 2$ est croissante alors que la fonction $g : x \mapsto -3x + 2$ est décroissante.

De manière beaucoup plus générale on a le résultat suivant.

Théorème:
Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine.

- Si $m > 0$ alors la fonction est croissante.
- Si $m < 0$ alors la fonction est décroissante.
- Si $m = 0$ alors la fonction est constante.

Démonstration:
Si $f(x) = mx + p$, alors $f'(x) = m$ et donc le sens de variation de f dépend du signe de m.

Exercice:
Quel est le sens de variation des fonctions suivantes ?

- $f : x \mapsto 8$
- $g : x \mapsto -3x + 5$
- $h : x \mapsto x$

Remarque

Les variations d'une fonction affine $f : x \mapsto mx + p$ peuvent être résumées dans un tableau dit de variation. Exemple si $m > 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
f		$\nearrow$	

1.2.3 Signe d'une fonction affine

Définition:
Soit f une fonction quelconque.

- f est positive sur un intervalle I si $\forall x \in I$, $f(x) > 0$.
- f est négative sur un intervalle I si $\forall x \in I$, $f(x) < 0$.

Remarque

- Déterminer si une fonction est positive ou négative revient à résoudre une inéquation.
- Si une fonction affine f est non constante, alors il existe un unique réel r pour lequel $f(r) = mr + p = 0$. D'où $r = -\frac{p}{m}$.

De la même manière que pour les variations, on résume le signe d'une fonction affine $f : x \mapsto mx + p$ dans un tableau dit de signe.
Exemple si $m > 0$:

x	$-\infty$	$-\dfrac{p}{m}$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

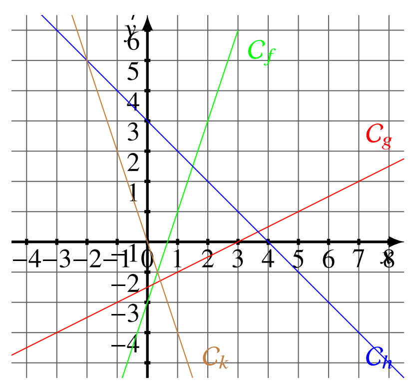
Exercice :
Associer à chaque droite sa représentation graphique

1. $d_1 : y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$

2. $d_2 : y = 3x - 2$

3. $d_3 : y = -3x$

4. $d_4 : y = -x + 4$



1.3 Fonction exponentielle

1.3.1 Définition et caractérisation

Propriété:
Parmi toutes les fonctions $x \mapsto a^x$, il en existe dont la tangente à la courbe représentative au point $(0; 1)$ a pour coefficient directeur 1.

Définition:
Cette fonction est la fonction exponentielle de base e, notée exp, définie par $\exp : x \mapsto e^x$.
Le réel e est environ égal à $2,718$.

Remarque

On a $e^0 = 1$ et $e^1 = e$

1.3.2 Limites aux bornes

Propriété:
On a :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

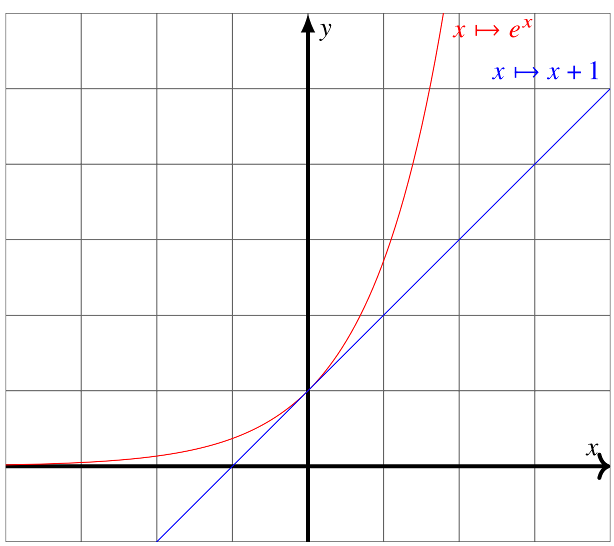
Démonstration:
Par construction d'une fonction puissance.

1.3.3 Variations

Propriété:
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration:
Si $f(x) = e^x$ alors $f'(x) = e^x > 0$, d'où le résultat.

Il est alors possible de représenter graphiquement la fonction exponentielle grâce aux propriétés précédentes



1.3.4 Relation fonctionnelle

Propriété:
Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

Démonstration:
Par propriétés naturelles sur les puissances.

Remarque

Cette propriété se généralise pour plusieurs facteurs.

Exercice:
Simplifier les expressions suivantes :

- $A = e^3 \times e^{-4} \times e^2$
- $B = \dfrac{e^{-3}}{e^2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, C(x) = \left(e^{3x}\right)^2$
- $\forall x \in \mathbb{R}, D(x) = e \times (e^x)^{-4}$

Propriété:
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

- $e^a = e^b \iff a = b$
- $e^a > e^b \iff a > b$

Démonstration:
Par stricte croissance de la fonction exponentielle.
Exercice:
Résoudre les équations et les inéquations suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- $e^x = e^6$
- $e^x < e^{-2}$
- $e^{x^2} - e^{-2} = 0$
- $e^{x^2+5x} - e^6 < 0$

1.4 Fonction logarithme népérien

1.4.1 Définition et caractérisation

Définition:
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle logarithme népérien de a l'unique solution de l'équation $e^x = a, x \in \mathbb{R}$. Autrement dit on a:

$$e^x = a \iff x = \ln(a)$$

❗ Remarque

- On a $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.
- On notera $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguités.
- Le logarithme népérien d'un nombre réel nul ou négatif n'existe pas :
- *(Hors programme)* L'unicité du logarithme népérien découle de la bijectivité de la fonction exponentielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété :

- Soit $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$

Démonstration:

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, par définition du logarithme népérien de x.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > 0$ et d'après le premier point on a $e^{\ln(e^x)} = e^x$ et par stricte croissante de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ on a donc bien le résultat.

Exemple:

- $e^{\ln(5)} = 5$
- $\ln(e^{-0,1}) = -0,1$
- $\ln(\sqrt{e}) = \ln(e^{0,5}) = 0,5$

Exercice:
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $e^{3x+2} = 5$

Définition:
On appelle fonction logarithme népérien la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\ln : x \mapsto \ln(x)$.

Propriété:

La fonction logarithme est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Démonstration:
Il y a deux points à montrer, que la fonction logarithme est dérivable et que sa dérivée est bien de la bonne expression. Seul le deuxième point sera ici au programme.

- Montrons que ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Soit donc $x > 0$, on veut montrer que le taux d'acroissement est convergent pour tout x:

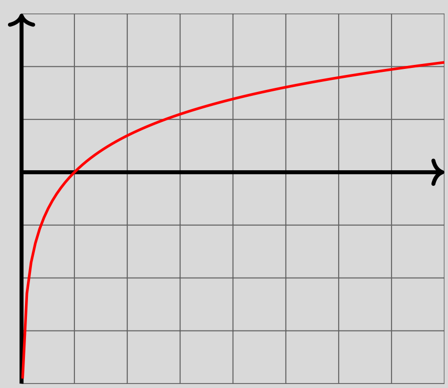
$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{x}+o(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x}+o(1) \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned} \tag{1}$$

  On en conclut donc que ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a une expression de sa dérivée.
- Soit f la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = e^{\ln(x)}$.
  On a $f'(x) = \ln'(x) \times f(x)$. On conclut d'après une propriété précédente.

1.4.2 Limites aux bornes et variations

Propriété:

- La fonction logarithme est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On a de plus :
  - $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$
  - $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$



Démonstration :

- La dérivée de la fonction logarithme est la fonction inverse qui est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où le résultat du premier point.
- On en déduit les résultats de limite car $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$.

1.4.3 Relation fonctionnelle

Propriété:
Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$:

- $a = b \iff \ln(a) = \ln(b)$
- $a < b \iff \ln(a) < \ln(b)$

Démonstration :
Le premier point découle immédiatement de la définition du logarithme népérien. Le deuxième point découle de la stricte croissance de la fonction logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété:
Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Démonstration:
On a $a = e^{\ln(a)}$ et $b = e^{\ln(b)}$ et $a \times b = e^{\ln(a \times b)}$.
Or $a \times b = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$.
D'où $e^{\ln(a \times b)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$ et on a donc le résultat par bijectivité de l'exponentielle.

Corollaire:
Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$:

- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$
-

Démonstration :
La démonstration est laissée au lecteur, tout repose sur la propriété précédente.

Exercice:

1. Simplifier les expressions suivantes :
   - $A = \ln(1000) - \ln(0,1) + \ln(0,01)$
   - $B = \ln(32) - 7\ln(2) + \ln\left(\dfrac{1}{8}\right)$
2. Dans chacun des cas, déterminer le plus petit entier n solution de l'inéquation :
   - $0,92^n \leq 0,75$
   - $0,2 \geq \left(1 - \dfrac{9}{100}\right)^n$
3. Résoudre le système d'équation : $\begin{cases} \ln(x\sqrt{y}) & = 9 \\ 2\ln(x) + \ln(y^3) & = 0 \end{cases}$

1.5 Fonctions puissances

1.5.1 Définition et caractérisation

Définition:
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction puissance d'exposant α, notée f_α est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par :

$$f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

Exemple:
Si $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on a $f_{\frac{1}{2}}(x) = x^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln(x)} = \sqrt{x}$.

1.5.2 Sens de variation

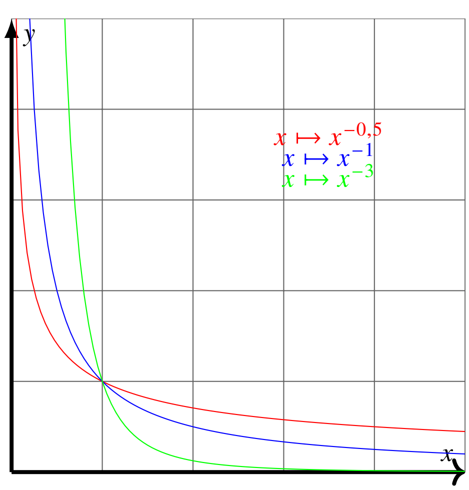
Propriété:
La fonction puissance f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Démonstration:
On a $f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln(x)}$, et donc par dérivation d'une fonction composée on a $f'_\alpha(x) = \dfrac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln(x)} = \alpha \dfrac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

Le signe de la dérivée dépend du signe de α, on a alors par exemple si $\alpha < 0$:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
f	$+\infty \searrow 0$

On représente ci-dessous différentes représentations graphiques de fonctions puissances pour diverses valeurs de α.



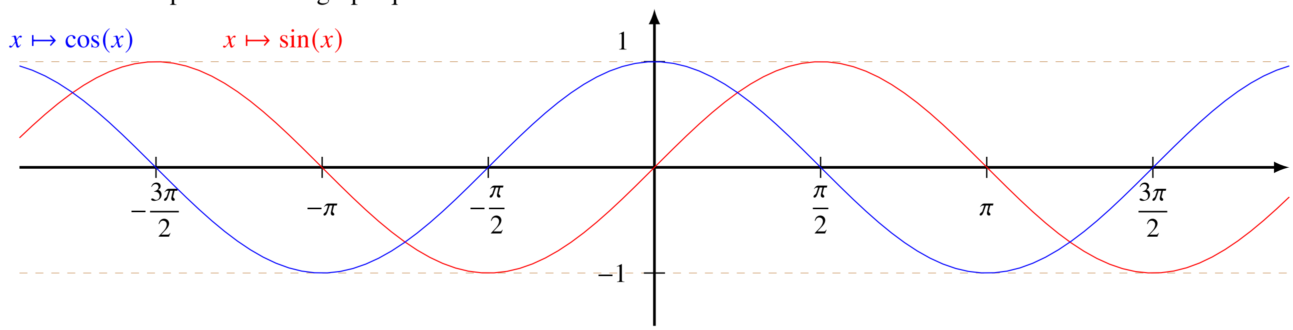
1.6 Fonctions trigonométriques

1.6.1 Définitions et représentations graphiques

Définition:

- La fonction cosinus est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \cos(x)$.
- La fonction sinus est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin(x)$.

On en déduit les représentations graphiques suivantes :



Définition/Propriété:
$\forall (x, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$ et $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$.
On dira alors que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π, ou encore simplement 2π-périodiques.

Cela signifie que l'on retrouve la même "parcelle de courbe" sur chaque intervalle de longueur 2π.

1.6.2 Parité

Définitions:

- Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est une fonction paire. C'est-à-dire qu'une fonction f quelconque est paire si et seulement si $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = f(x)$.
- Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'origine du répère est une fonction impaire. C'est-à-dire qu'une fonction f quelconque est impaire si et seulement si $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = -f(x)$.

Propriétés:

- La fonction cosinus est paire, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$.
- La fonction sinus est impaire, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$.

Exercice:
Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(x) - \sin(2x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est impaire.

1.6.3 Fonctions sinusoïdales

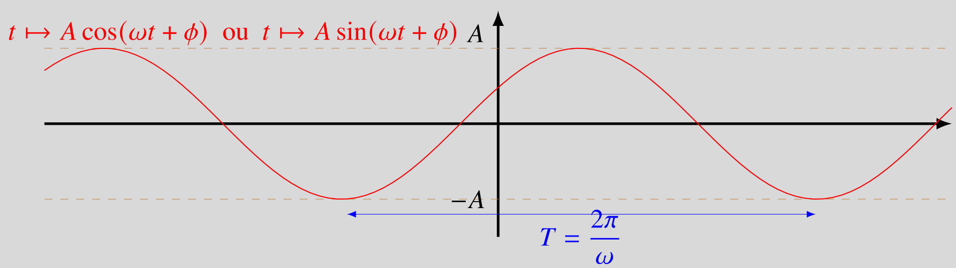
En physique, de nombreux phénomènes peuvent être modélisés par des signaux sinusoïdaux. Ces phénomènes se retrouvent dans l'étude des ondes sonores et ultrasonores, dans l'étude de propagation dans différents milieux ou encore dans l'étude de l'énergie électrique.

Définition: Une fonction sinusoïdale a une expression de la forme $t \mapsto A\cos(\omega t + \phi)$ ou $t \mapsto A\sin(\omega t + \phi)$.

- A est un réel positif qui représente l'amplitude du signal, c'est-à-dire la valeur maximale prise par la fonction.
- $(\omega t + \phi)$ est la phase instantanée avec :
  - ω : la pulsation, un réel qui s'exprime en radians par secondes.
  - ϕ : un réel s'exprime en radians qui représente la phase à l'origine, c'est-à-dire à l'instant $t = 0$.

Propriété:

- Les fonctions sinusoïdales sont périodiques de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, exprimé en secondes.
- La fréquence, qui correspond au nombre de périodes par unité de temps est $f = \dfrac{1}{T}$, elle s'exprime en Herz (Hz).
- La fréquence, la pulsation et la période sont liées par : $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$



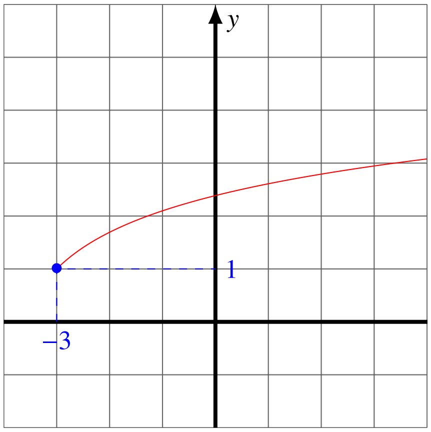
Exercice:

Déterminer la période et la phase à l'origine de la fonction sinusoïdale donnée pae $f(t) = -2\cos\left(5t + \dfrac{\pi}{4}\right)$

2 Limites

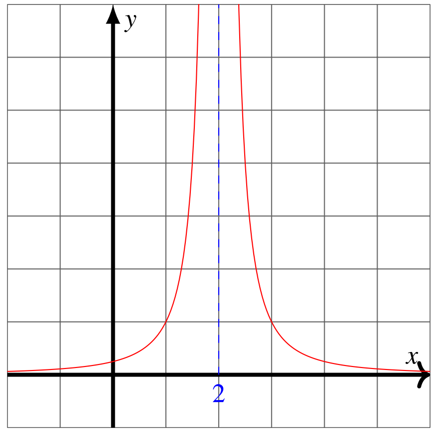
2.1 Interprétation graphique

2.1.1 Limite en un point



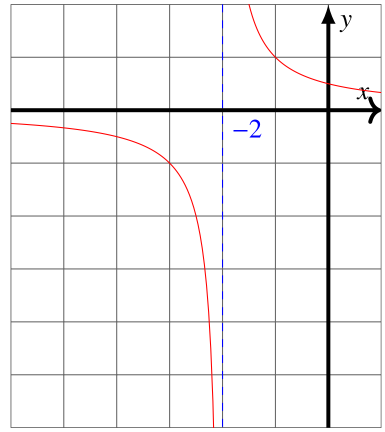
$$\lim_{x \to -3} f(x) = 1$$

Il n'y a pas d'asymptote.



$$\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$$

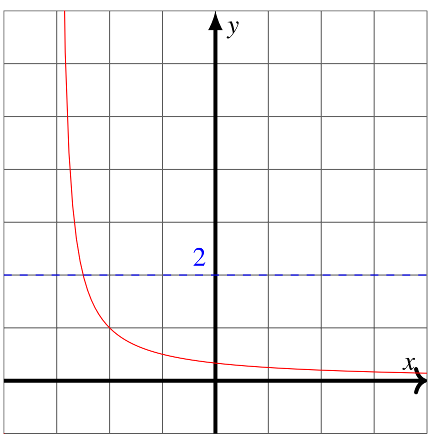
La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.



$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$$

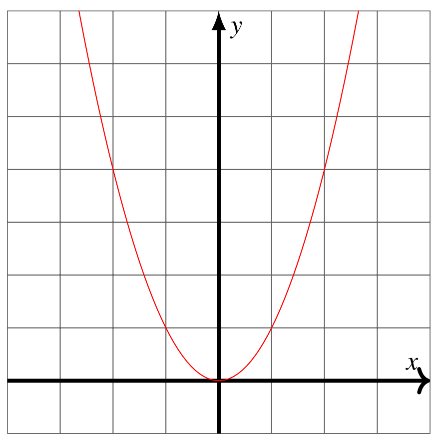
La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

2.1.2 Limite en ∞



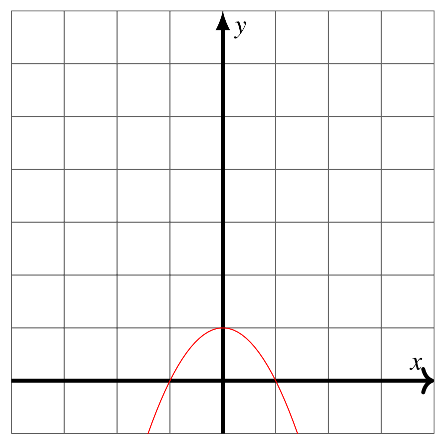
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Il n'y a pas d'asymptote.



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

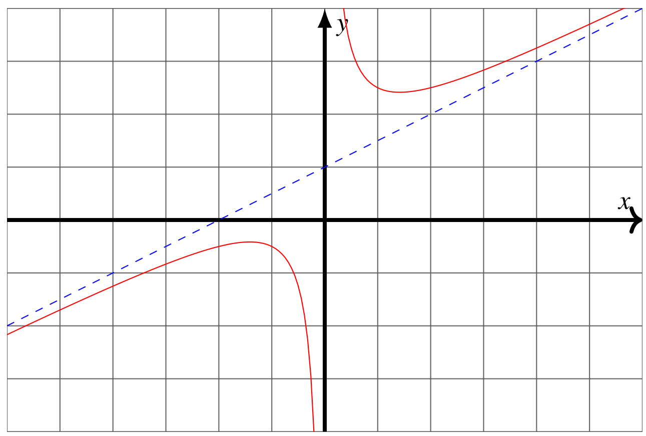
Il n'y a pas d'asymptote.

Définition:
Soit f une fonction et d la droite d'équation $y = ax + b$ tel que :

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

on dit alors que la droite d est une asymptote oblique à la courbe représentative C_f en $\pm\infty$.

Exemple:
Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x + 1$ définie sur $\mathbb{R}^*$.



On a $\lim_{x \to +\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.
La courbe admet donc une asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Exercice:
Soit le tableau de variation d'une certaine fonction f :

x	$-\infty$		-5		-3		0		$+\infty$
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	3

1. Déterminer les asymptotes verticales en précisant leur équation.
2. Déterminer les asymptotes horizontales en précisant leur équation.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

2.2 Limites des fonctions usuelles

Voici un tableau qui résume les différentes limites des fonctions de référence.

	$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}$	$,x^\alpha, \alpha > 0$	$\frac{1}{x^\alpha}, \alpha > 0$	$\ln(x)$	$\exp(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\lim\limits_{x\to-\infty}$	$\pm\infty$	0	indéfini	indéfini	indéfini	0	aucune	aucune
$\lim\limits_{x\to 0^-}$	0	$\pm\infty$	indéfini	indéfini	indéfini	1^-	1^-	0^-
$\lim\limits_{x\to 0^+}$	0^+	$+\infty$	0^+	$+\infty$	$-\infty$	1^+	1^+	0^+
$\lim\limits_{x\to+\infty}$	$+\infty$	0^+	$+\infty$	0^+	$+\infty$	$+\infty$	aucune	aucune

2.3 Opérations sur les limites

2.3.1 Limite d'une somme

$\lim f =$	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g =$	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g =$	$l+l'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

<u>Exercice:</u>
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + x^3)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x} + x^2\right)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x + x^3)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2 + x^3)$

2.3.2 Limite d'un produit

$\lim f =$	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim g =$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim f \times g =$	$l \times l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I

<u>Exercice:</u>
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + 3) \times (e^x - 2)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x} \times (x-3)\right)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1) \times x^3$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1) \times \frac{1}{x}$

2.3.3 Limite d'un quotient

$\lim f =$	l	l	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim g =$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0	l'	$\pm\infty$	0
$\lim \frac{f}{g} =$	$\frac{l}{l'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I	F.I

Exercice:
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+3}{e^x-2}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}-3}{x^2}$
3. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x-1}$
4. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^3}$

2.3.4 Compositions

Propriété:
Soient $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$.
Si $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to a} f(x) = b \\ \lim_{y\to b} g(y) = c\end{array}\right\}$ alors $\lim_{x\to a} (g\circ f)(x) = c$

Démonstration:
On sait que :

$$\forall \epsilon_1 > 0, \exists \eta_1 > 0, |x-a| < \eta_1 \implies |f(x)-b| < \epsilon_1$$

$$\forall \epsilon_2 > 0, \exists \eta_2 > 0, |y-b| < \eta_2 \implies |g(y)-c| < \epsilon_2$$

Soit donc ϵ_1, ϵ_2 deux réels strictement positifs et posons $y = f(x)$. On a donc qu'il existe $\eta_1 > 0$ tel que $|x-a| < \eta_1 \implies |f(x)-b| < \epsilon_1 \implies |y-b| < \epsilon_1$.
Posons $\eta_2 = \epsilon_1$, il existe ainsi $\eta_2 > 0$ tel que $|g(y)-c| < \epsilon_2 \implies |(g\circ f)(x)-c| < \epsilon_2$.
D'où le résultat.

Exercice:
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to-\infty} e^{x+3}$
2. $\lim_{x\to-\infty} \ln(2x+1)$
3. $\lim_{x\to 0} \sqrt{x+4}$

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

Dans ce cas, toutes les situations sont a priori possibles, existence d'une limite finie, nulle ou non ; existence d'une limite infinie, absence de limite.

Les quatre cas d'indétermination des limites sont :

$\lim f$	$\lim g$	Limite indéterminée	Type d'indétermination
$+\infty$	$-\infty$	$f(x)+g(x)$	$\infty-\infty$
0	$\pm\infty$	$f(x)\times g(x)$	$0\times\infty$
0	0	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{0}{0}$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\infty}{\infty}$

! Remarque

Lorsqu'on a une forme indéterminée, cela signifie qu'on ne peut pas conclure directement, il faut donc lever l'incertitude en factorisant ou en développant.

Exercice:
Calculer les limites suivantes en explicitement le type d'indétermination:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2-x$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2x+1}{2x^2-3}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}(x^2+1)$
4. $\lim\limits_{x\to 1y} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

2.5 Croissance comparée de l'exponentielle, du logarithme et des fonctions puissances

Propriété:
Pour tout réel $\alpha>0$ on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^\alpha}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$$

Démonstration:
Montrons le deuxième point.

- Si $\alpha=1$, on étudie la fonction $f(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}$ pour se rendre compte qu'elle est strictement positive. On a donc $\dfrac{e^x}{x}>\dfrac{x}{2}$.
  On a donc le résultat par comparaison.
- Si $\alpha>1$, on a $\dfrac{e^x}{x^\alpha}=\left(\dfrac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\frac{x}{\alpha}}\right)^\alpha\times\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^\alpha$.
  Posons $X=\dfrac{x}{\alpha}$, on a donc :
  $\dfrac{e^x}{x^\alpha}=\left(\dfrac{e^X}{X}\right)^\alpha\times\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^\alpha$.
  On a donc bien le résultat par limites de composition de fonctions.

Le premier point se démontre en posant $y=\ln(x)$ et en appliquant le deuxième point.

! Remarque

L'idée à retenir, en $+\infty$, est l'ordre de prépondérance "$\ln(x)\ll x^\alpha\ll e^x$".

> **Corollaire:**
> Pour tout réel $\alpha > 0$ on a :
>
> $$\lim_{x\to 0} x^{\alpha}\ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -\infty} x^{\alpha}e^{x} = 0$$

Démonstration:

- Le premier point se démontre en posant $X = \dfrac{1}{x}$ et en appliquant le 1er point de la propriété précédente.
- Le deuxième point se démontre en posant $X = -x$ et en appliquant le 2ème point de la propriété précédente.

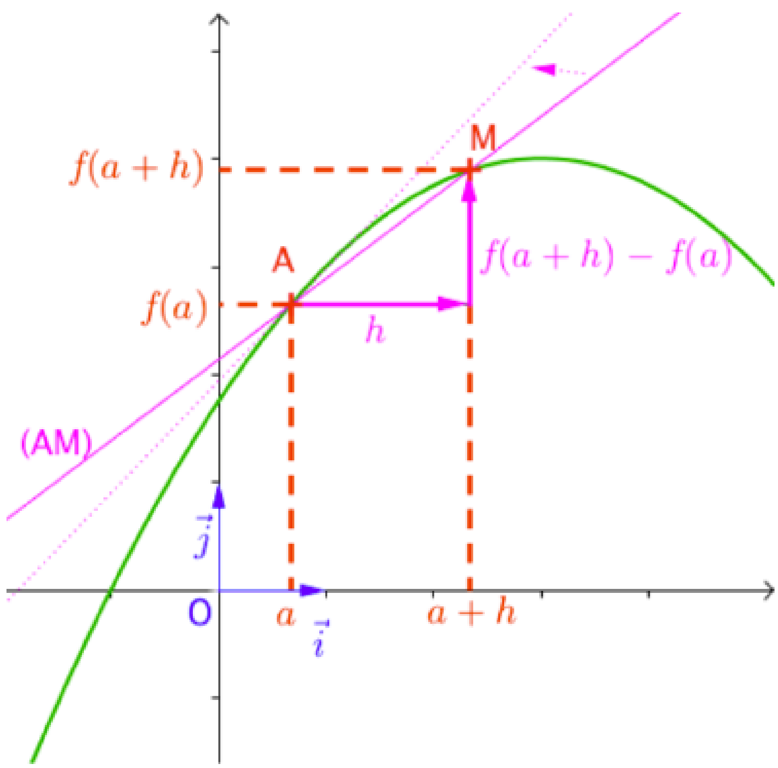
3 Dérivation

3.1 Nombre dérivé

> **Rappels**:
> Soit une fonction affine $f : x \mapsto mx + p$ dont la droite représentative passe par les points $A(x_1, f(x_1))$ et $B(x_2, f(x_2))$.
> Alors le coefficient directeur de la fonction f est donné par :
>
> $$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
>
> qui est le taux de variation entre les points x_1 et x_2.

Donc à partir des coordonnées de deux points, on peut déterminer l'inclinaison de la droite passant par ces deux points.

On considère une fonction f quelconque. On s'intéresse aux points de coordonnées $A(a, f(a))$ et $M(a+h, f(a+h))$



D'après le rappel précédent, on peut donc calculer le coefficient directeur de la droite (AM) qui est donné par :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Lorsque le point M se rapproche de A, on va avoir que h se rapproche de plus en plus de 0. Ceci signifie donc que le coefficient directeur de la droite (AM) va être égal à la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0.

Définition:
Ce coefficient directeur s'appelle le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$ et on a :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

On dira que f est dérivable en a.

Il se peut que la limite ne soit pas finie, on dira que f n'est pas dérivable en a. C'est le cas de la fonction racine carrée en 0.
Exercice:
Soit $f : x \mapsto x^2$, calculer $f'(2)$.

3.2 Fonction dérivée

Définition:
Soit f une fonction dérivable en tout point x d'un intervalle I, alors la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelé fonction dérivée de f sur I.

On obtient le tableau de dérivation suivant :

	Fonction f	**Dérivée** f'
Constante	$f(x) = a$	$f'(x) = 0$
Affine	$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
Inverse	$f(x) = \frac{a}{x}$, $a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = -\frac{a}{x^2}$
Racine carrée	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Puissance	$f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
Logarithme	$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
Exponentielle	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
Cosinus	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
Sinus	$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$

Exercice:
Dériver les fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivabilité :

- $f : x \mapsto 4x - 3$
- $g : x \mapsto 2x^5$
- $h : x \mapsto \dfrac{2}{x}$
- $p : x \mapsto -\cos x$

3.3 Opérations

Soit u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
On a ci-dessous un récapitulatif d'opérations de dérivation :

Fonction	**Dérivée**
$ku,\, k \in \mathbb{R}$	ku'
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$u^n, n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$v \circ u$	$u' \times (v' \circ u)$

Exercice:
Pour chaque fonction f, exprimer $f'(x)$ en fonction de x.

1. $f(x) = 3(x^2 + 4)$
2. $f(x) = (-2x + 3)(5x - 3)$
3. $f(x) = (2x^2 - 7)^4$
4. $f(x) = \dfrac{3x - 4}{x^2 + 3}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{-3x + 1}$
6. $f(x) = e^{3x+1}$
7. $f(x) = \ln(-2x + 5)$
8. $f(x) = \cos(2x + 1)$

3.4 Dérivées successives

Définition:
Soit f une fonction dérivable. Lorsque cela est possible, on définit les dérivées successives de f, notée :

$$f' \;\; ; \;\; f'' \;\; ; \;\; f^{(3)} \;\; ; \;\; ... \;\; ; \;\; f^{(n)}$$

Exercice:
Soit $f : x \mapsto 2x^3 - x^2 + x + 3$ définie sur $\mathbb{R}$. Exprimer $f^{(5)}(x)$ en fonction de x.

! Remarque

En physique et en mécanique, on utilise la notation différentielle :

$$\frac{df}{dt} = f' \quad \text{et} \quad \frac{d^2 f}{dt^2} = f''$$

3.5 Equation de la tangente

On a vu que lorsque h se rapproche de 0, le point M se rapproche de A et que donc le taux de variation se rapproche du nombre dérivé $f'(a)$. Par ailleurs, la droite (AM) tend à être tangente à la courbe de f.

Définition:
La courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente (T) de coefficient directeur $f'(a)$.

! Remarque

La tangente à une courbe en un de ses points est une droite qui "touche" la courbe au plus près au voisinage de ce point.

La tangente est une droite de coefficient directeur $f'(a)$ donc a pour expression : $(T) : y = f'(a)x + b$. Or $A(a, f(a)) \in (T)$ d'où $f(a) = f'(a)a + b$ et donc au final on a l'équation de la tangente donnée par :

$$\boxed{(T) : y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

.

L'idée n'est pas de retenir par coeur la formule précédente mais de savoir la retrouver.

Méthode:
Soit f une fonction quelconque et $A(a, f(a))$ sur le courbe de f. On veut déterminer la tangente à la courbe de f au point A:

- Déterminer $f(a)$ si on ne le connait pas déjà ;
- Déterminer le nombre dérivé $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$;
- La tangente au point A est donc de la forme $y = f'(a)x + b$, pour déterminer b on évalue l'équation de la tangente au point A ;
- Représenter graphiquement la tangente revient à tracer une fonction affine.

Exercice:
Déterminer l'équation de la tangente des fonctions suivantes aux points suivants:

- $f(x) = x^2$ au point $A(1, 1)$.
- $f(x) = x^3$ au point $A(1, 1)$.

Exercice:
Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a dans les cas suivants :

- $a = -3$, $f(-3) = 1$ et $f'(-3) = 2$.
- $a = 5$, $f'(5) = -5$ et la tangente passe par le point de coordonnées $(1, -1)$.
- $a = 1$, $f(1) = 3$ et (T) est parallèle à la droite d'équation $y = x - 1$.

3.6 Développements limités

3.6.1 Généralités

Définition:
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de contenant 0.
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = P_n(x) + x^n \epsilon(x) \text{ où } \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0.$$

ou sous forme développée

$$f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \epsilon(x)$$

On dit que $P_n(x)$ est la partie régulière du développement limité et $x^n \epsilon(x)$ est le le reste.

3.6.2 Dévéloppements limités usuels

Au voisinage de zéro, on a :

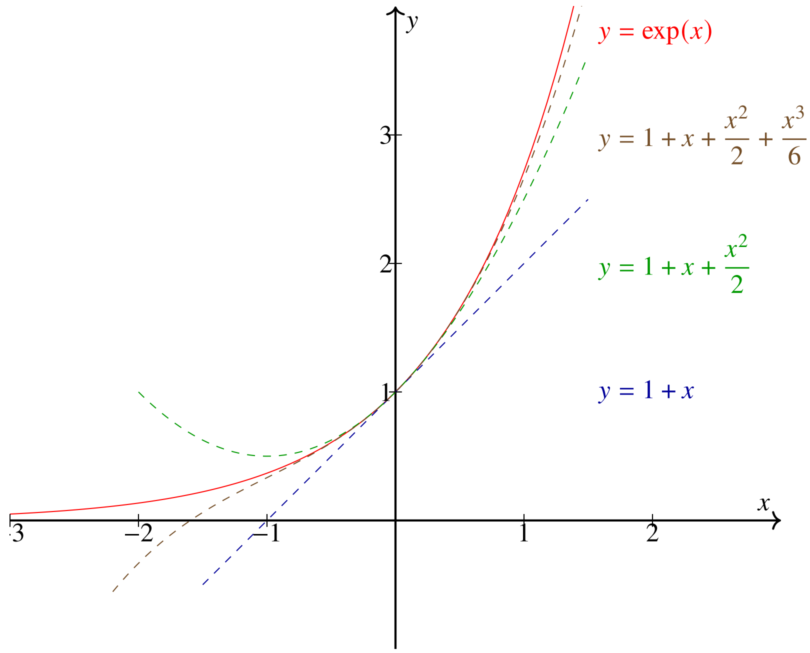
- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x).$
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n \epsilon(x).$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} + x^n \epsilon(x).$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + x^n \epsilon(x).$
- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1!} + x^n \epsilon(x).$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \epsilon(x).$

! Remarque

La partie régulière du développement limité en 0 d'une fonction paire (respectivement impaire) est un polynôme constitué de monômes de degré pair (respectivement impair).

3.6.3 Interprétation graphique

Graphiquement, on obtient à différents ordres des approximations de la fonction au voisinage de 0.
Plus l'ordre est élevée, meilleure est l'approximation !
On a donc par exemple pour la fonction exponentielle.



4 Etude des variations d'une fonction

4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

Propriété fondamentale:
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est strictement croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) > 0$;
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) < 0$;
- f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) = 0$;

Démonstration:
La démonstration est laissée au lecteur, il s'agit d'exploiter la définition du taux de variation.
Exemple:
On cherche à étudier les variations de la fonction $f(x) = 2x^2 + 8x - 5$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- On commence par déterminer la dérivée de f.
  On a $f'(x) = 4x + 8$.

- On étudie le signe de cette dérivée.
  On a $f' < 0$ sur $]-\infty; -2[$ et $f' > 0$ sur $]-2; +\infty[$.

- On en déduit les variations de f par la propriété fondamentale.
  On a f strictement décroissante sur $]-\infty; -2[$ et strictement croissante sur $]-2; +\infty[$.

- On trace le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$+\infty$

- On cherche les extremums de la fonction f.
  On a que f' ne s'annule que en -2 et change de signe donc f atteint son minimum en -2 qui vaut $f(-2)$.

Exercice:
Soit $f : x \mapsto 2x^2 + 1 - \ln(x)$ et $g : x \mapsto (x+2)e^{-x}$, établir la tableau de variation de f et g sur leur intervalle de définition.

4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Propriété:
Si f est une fonction continue, dérivable et strictement croissante (resp. décroissante) sur un intervalle $[a;b]$ alors pour tout $\lambda \in [f(a); f(b)]$ (resp. $[f(b); f(a)]$), l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution unique sur l'intervalle $[a;b]$.

Démonstration:
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies telles que :

- Pour $n \in \{0, 1\}$, $a_0 = a_1 = a$ et $b_0 = b_1 = b$
- Pour $n > 1$, posons $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.
  - Si $f(c_n) \geq \lambda$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.
  - Si $f(c_n) \leq \lambda$ alors $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété :
$\mathcal{P}(n)$: "$a \leq a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq b$, $f(a_n) \leq \lambda \leq f(b_n)$ et $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}}$"

- **Initialisation :**
  $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies par construction des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.
  - Si $f(c_n) \geq \lambda$ alors on a $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.
    On a donc $a \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \leq b_n \leq b$ par hypothèse de récurrence.
    Par ailleurs on a $f(a_{n+1}) = f(a_n) \leq \lambda$ par hypothèse de récurrence et $f(b_{n+1}) = f(c_n) \geq \lambda$ par hypothèse de cas.
    Enfin on a $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2} = \dfrac{b-a}{2^n}$ par hypothèse de récurrence.
  - Si $f(c_n) \leq \lambda$, la preuve est identique par symétrie.
- **Conclusion :**
  La propriété est initialisé et héréditaire elle est donc vraie pour tout n.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et leur différence tend vers 0. Ces deux suites sont donc adjacentes et donc convergent vers une même limite $c \in [a, b]$. On a donc d'après l'inégalité $f(a_n) \leq \lambda \leq f(b_n)$, par passage à la limite et d'après le théorème des gendarmes on a donc bien le résultat.

Exercice:

Soit $f : x \mapsto x^3 + x + 1$, prouver qu'il existe une solution de l'équation $f(x) = 0$ puis arrondir cette racine à 10^{-1}.