Chapitre 2 : Probabilités

Table des matières

1 Vocabulaire des évènements

1.1 Vocabulaire

Définition:

- On appelle expérience aléatoire une expérience dont le résultat est dû au hasard.
- Une issue x_i est un résultat possible de l'expérience aléatoire.
- On note $\Omega = \{x_1; x_2; x_3; ...\}$ l'ensemble des issues possibles, appelé l'univers.
- Un évènement est un sous ensemble de Ω composé d'une ou plusieurs issues (entre accolade). S'il n'y a qu'une issue, on dit qu'il est élémentaire.

Exemple:

- On lance un dé numéroté de 1 à 6. On a $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. L'évènement "obtenir un 5" est élémentaire mais l'évènement "obtenir un nombre pair" ne l'est pas.
- On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. On a $\Omega = \{7 \text{ coeur}, 7 \text{ carreau}, ..., As \text{ pique}, As \text{ trefle}\}$. Soit les événements :

  – A: "tirer le 7 de coeur"
  – B: "Tirer un pique"

  On a $A = \{7 \text{ coeur}\}$ qui est élémentaire et $B = \{7 \text{ pique}, 8 \text{ pique}, ..., As \text{ pique}\}$ ne l'est pas.

Définition:
On appelle évènement certain tout évènement égal à Ω.
On appelle évènement impossible, noté $\emptyset$, tout évènement irréalisable.

Exemple:
Si on tire un dé, l'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ l'évènement "Obtenir un nombre positif" est certain alors que l'évènement "Obtenir un 7" est impossible.

Exercice :
On considère une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10. Parmi ces boules, 5 sont rouges, 3 sont bleues et 2 sont vertes. Décrire dans chacun des cas l'univers de l'expérience aléatoire.

1. On tire une boule au hasard et on s'intéresse à sa valeur.
2. On tire une boule au hasard et on s'intéresse à sa couleur.

1.2 Intersection et union d'événement

Définition:
Soient A et B deux évènements.

- L'évènement "A et B" , noté A∩B, est constitué des issues réalisant à la fois A et B.
- L'évènement "A ou B" , noté A∪B, est constitué des issues réalisant A ou B.
- Les évènements A et B sont dits contraires si l'un se réalise lorsque l'autre ne se réalise pas. B est alors l'évènement contraire de A, noté $\bar{A}$.
- Deux évènements sont dits disjoints s'ils ne peuvent pas se réaliser simultanément, c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$

Exemple:
On s'intéresse à l'expérience aléatoire d'un tirage de carte.

On considère les évènements suivants A = "Tirer un 8" ; B = "Tirer un pique" ; C = "Tirer le 7 de pique"
On a les évènements suivants:

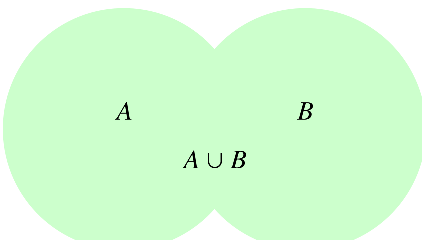
- $A \cap B$ = "tirer le 8 de pique" et $A \cup B$ = "tirer un 8 ou un pique".
- $A \cap C = \emptyset$ et $A \cup C$ = "tirer un 8 ou le 7 de pique".
- $B \cap C = C$ et $B \cup C = B$.

<u>Exercice:</u>
On lance un dé à six faces.

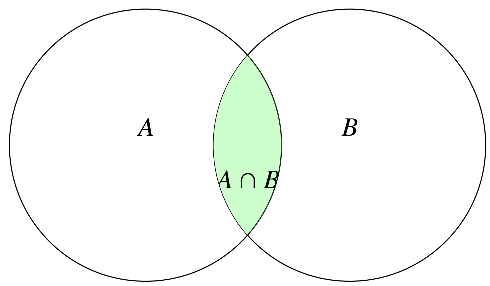
1. Donner l'événement contraire de l'événement A : "Obtenir un nombre pair".
2. Donner l'événement "Obtenir un nombre pair et un nombre inférieur à 5".
3. Donner l'événement "Obtenir un nombre impair et un nombre supérieur à 2".

1.3 Représentation des événements

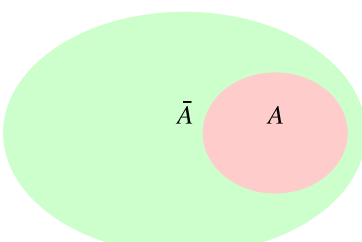
1.3.1 Diagrammes ou patates



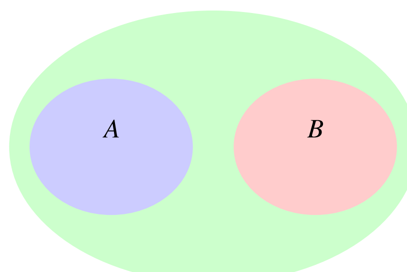
Réunion d'événements



Intersection d'événements



Evénements contraires



Evénements disjoints

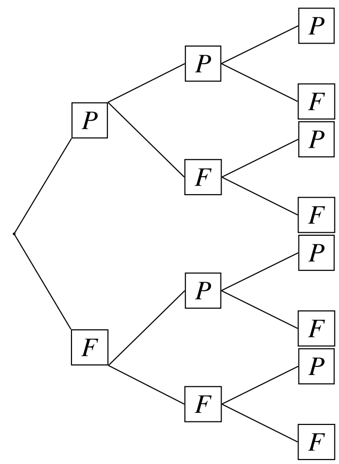
1.3.2 Tableaux

On lance deux dés à 4 face et on calcule le produit obtenu :

	1	**2**	**3**	**4**
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

1.3.3 Arbres de probabilité

On lance une pièce de monnaie trois fois de suite, on peut schématiser cette expérience par un arbre:



2 Probabilité d'un évènement

Définition:
Soit Ω un univers fini. On définit une probabilité en associant à chaque événement un nombre entre 0 et 1 tel que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ pour tous événements A et B disjoints.

Exercice :
On lance un dé à 6 faces.

1. On suppose que le dé n'est pas truqué, déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire puis de l'événement A : "Le nombre sorti est pair".
2. On suppose que le dé est truqué avec :

   - $\mathbb{P}(\{1\}) = \dfrac{1}{12}$
   - $\mathbb{P}(\{6\}) = \dfrac{5}{12}$
   - $\mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(\{4\}) = \mathbb{P}(\{5\})$

   Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire puis de l'événement A : "Le nombre sorti est pair".

Propriétés:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- Pour tout évènement A, $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$
- Pour tous évènements A et B, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- Pour tout évènement A, $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Démonstration:

- Les deux premiers points sont élémentaies par définition d'une probabilité.
- Posons $A_1 = A \backslash B$ et $B_1 = B \backslash A$. On a que $(A_1, B_1, A \cap B)$ fome une partition de $A \cup B$. On a donc :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

  Or $(A_1, A \cap B)$ (resp $(B_1, A \cap B)$) forme une forme de A (resp B).D'où :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A \cap B) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

  D'où le résultat.
- Le dernier point vient du fait que $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = \Omega$ et du point précédent.

! Remarque TRES importante

Une probabilité est TOUJOURS comprise entre 0 et 1.

Définition:
On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité. On a alors dans ce cas :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables à A}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

Exemple:

- Un lancer de dé à 6 faces est bien une situation d'équiprobabilité.
- Un lancer de pile ou face est bien une situation d'équiprobabilité.

Exercice:
On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Déterminer la probabilité des événements suivants:

- A: "La carte tirée est un valet."
- B: "La carte tirée est un pique."

Exercice:
On choisit un nombre au hasard compris entre 1 et 20. On note :

- A : "Le nombre est multiple de 3".
- B : "Le nombre est multiple de 2".

Donner les événements A et B puis calculer la probabilités des événements suivants :

- A
- $\bar{A}$
- B
- $A \cap B$
- $A \cup B$

3 Probabilités Conditionnelles

3.1 Définitions et propriétés

Définition:
Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. On considère un évènement B dans Ω de probabilité non nulle $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
Pour tout évènement A, on appelle probabilité de A sachant B, noté $\mathbb{P}_B(A)$ (ou $\mathbb{P}(A|B)$) la quantité :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\text{Nombre de cas pour A} \cap B}{\text{Nombre de cas pour A}}$$

D'après la définition précédente, on a que pour deux événements A et B :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

On en déduit donc la propriété suivante :

Propriété:
Dans certain cas on peut être amené à connaître la probabilité conditionnelle.
On a alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$

Exemple:
Dans un sac de dragées, 60% des dragées sont de couleur bleue, 30% des dragées sont bleues et à l'amande et 40% des dragées bleues sont au chocolat. On choisit une dragée au hasard dans le sac. On note les événements :

- A : "la dragée est à l'amande"
- B : "la dragée est bleue"
- C : "la dragée est au chocolat"

La probabilité d'obtenir une dragée à l'amande sachant qu'elle est bleue est $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{0,3}{0.6} = 0,5$
La probabilité d'obtenir une dragée bleue et au chocolat est $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(C) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$

! ATTENTION

Les quantités $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$ n'ont AUCUNES raisons d'être égales

Propriété: *Formule des probabilités totales*
Soit A_1, A_2, A_3 des événements deux à deux disjoints et B un évènement quelconque. On a alors :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \mathbb{P}(A_3 \cap B)$$

Démonstration:
On a :
$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap \Omega) = \mathbb{P}(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3)) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2) + \mathbb{P}(B \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(B) + \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}_{A_3}(B)$.

3.2 Exemple de calculs de probabilités conditionnelles par différentes méthodes

Dans un atelier, deux machines M_1 et M_2 découpent des pièces métalliques identiques. M_1 fournit 60% de la production (parmi lesquelles $6,3$% sont défectueuses), le reste étant fourni par M_2 (dont 4% de la production est défectueuse).
La production du jour est constituée des pièces produites par les deux machines, et on en tire en fin de soirée une pièce au hasard (tous les prélèvements sont supposés équiprobables).

1. Utilisation des formules des probabilités conditionnelles.
   a. Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_1 ?
   b. Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_2 ?
   c. Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse ?

2. Utilisation d'un tableau
   On suppose maintenant que la production est composée de 10000 pièces.
   a. Reproduire et compléter le tableau suivant qui décrit la production du jour :

Nombre de pièces produites par M_1	Nombre de pièces produites par M_2 Total
Nombre de pièces défectueuses	
Nombre de pièces conformes	
Total	

   b. Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_1 ?
   c. Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_2 ?
   d. Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse ?

3. Utilisation d'un arbre des probabilités conditionnelles
   a. Dresser un arbre des probabilités conditionnelles relatif à la situation proposée.
   b. Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_1 ?
   c. Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_2 ?
   d. Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse ?

3.3 Evénements indépendants

Définition:
Deux événements A et B sont dits indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Exercice:
On lance deux fois de suite une pièce de monnaie.
On considère les événements A : "obtenir pile au premier lancer" et B : "obtenir deux résultats identiques". Ces deux événements sont-ils indépendants ?

4 Dénombrement

Définition:
Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit "factoriel n" par :
$n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times n$

Exemple :
$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

4.1 Arrangements

Définition:
Soit $n \in \mathbb{N}$ et A un ensemble de cardinal n et $k \leq n$. On appelle k-arrangement de A un k-uplets distinct de A. On notera $\mathcal{A}_n^k$ le nombre de k-arrangement de A.

Remarque

Un arrangement de A peut être vu comme un tirage avec ordre et sans remise des éléments de A.

Exemple:
Si $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $(1; 3; 4)$ et $(1; 4; 3)$ sont deux 3-arrangements de A.

Propriété:
Soient A un ensemble de cardinal n et $k \leq n$. Le nombre de k-arrangement de A est donné par : $\mathcal{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Démonstration:
Par un argument de dénombrement on a n possibilités pour choisir le premier élément puis $n-1$ pour le deuxième, ... , puis $n-k+1$ pour le k-ième. D'où le résultat.

Exercice:
Une urne contient 4 boules : une verte (V), une rouge (R), une bleue (B) et une jaune (J).
On tire 3 boules successivement sans remise, c'est-à-dire sans remettre la boule tirée dans l'urne après chaque tirage.
Déterminer le nombre de tirages possibles de 3 boules.

4.2 Permutations

Définition:
Soit A un ensemble de cardinal n. On appelle permutation de A tout n-uplet d'éléments distincts de A. On not $\mathcal{S}(A)$ l'ensemble des permutations de A.

! Remarque

Une permutation est donc un n-arrangement.
C'est une manière de réordonner un ensemble à n éléments, on dit encore que c'est une façon de placer n éléments dans n cases.

Propriété:
Le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$ est $n!$.

Démonstration
Par un argument de dénombrement on a n possibilités pour choisir le premier élément puis $n-1$ pour le deuxième, ... , puis 1 pour le n-ième. D'où le résultat.
Exercice:
Faire un emploi du temps d'une classe de BTS consiste (grossièrement) à placer 16 blocs de 2 heures, dans un planning hebdomadaire vierge, qui compte 16 créneaux de 2 heures. Déterminer le nombre d'emplois du temps différents que l'on peut constituer.

4.3 Combinaison

Définition :
Soit A un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et $k \leq n$. Une combinaison de k éléments de A est un sous-ensemble de A de cardinal k. On note $\binom{n}{k}$ le nombre de combinaisons de k éléments parmi n.

! Remarque

Une combinaison ne prend pas en compte l'ordre des éléments.

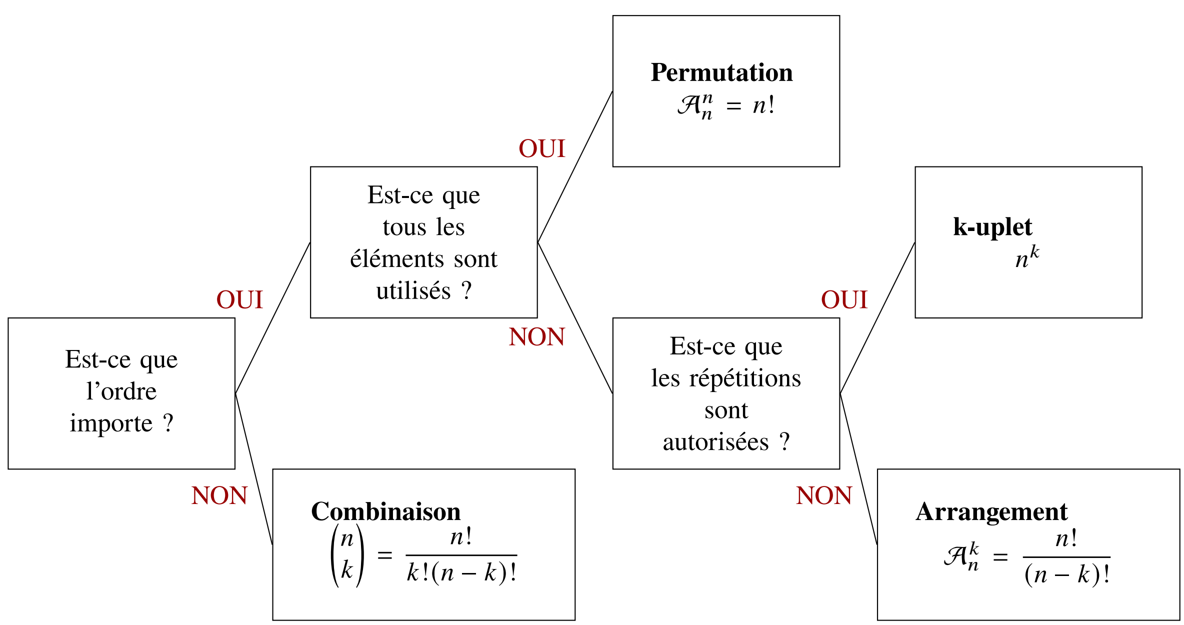
Propriété:
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \leq n$:

- $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Si $1 \leq k \leq n-1, \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Démonstration :
La démonstration est laissée au lecteur. Il s'agit simplement d'arguments calculatoires.
Exercice:
On tire 5 cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes, pour constituer une main (sans tenir compte de l'ordre d'arrivée des cartes).

1. Déterminer le nombre mains différentes possibles.
2. Déterminer le nombre de mains contenant exactement 3 rois.

4.4 Schéma récapitulatif



5 Variable aléatoire

5.1 Notion de variable aléatoire discrète

Définition:
Une grandeur numérique X prenant, lors d'une expérience aléatoire, des valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ avec des probabilités $p_1, p_2, ..., p_n$ est une **variable aléatoire discrète**.

Exemple:
Un jeu de hasard consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces. Le lanceur gagne la somme double de la valeur de la face obtenue si celle-ci est paire, sinon, il perd le double de la valeur indiquée par le dé.
On appelle X le gain, positif ou négatif, du joueur après un lancer.

- Ici, l'ensemble des issues possibles est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$,
- on a défini avec X une variable aléatoire réelle telle que :
  $X(1) = -2$, $X(2) = 4$, $X(3) = -6$, $X(4) = 8$, $X(5) = -10$ et $X(6) = 12$.

5.2 Loi d'une variable aléatoire

Définition:
La **loi de probabilité** de la variable aléatoire X est la fonction f qui a chaque valeur associe sa probabilité.

! Remarque

En général, on présente la loi d'une variable aléatoire X sous la forme d'un tableau, qui récapitule les valeurs prises par X ainsi que les probabilités associées.

Dans tout le reste du chapitre, on considèrera la variable aléatoire discrète de loi :

Valeurs de X : x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Probabilité : $\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Exemple:
On reprend l'énoncé de l'exemple précédent. La loi de X est donnée par :

x_i	-10	-6	-2	4	8	12
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Exercice:
On dispose d'un jeu de 32 cartes. On tire une carte dans ce jeu, et on attribue à ce tirage la valeur X calculée suivant la règle suivante :

- si la carte est un Roi, X vaut 4 points,
- si la carte est une Dame, X vaut 3 points,
- si la carte est un Valet, X vaut 1 point,
- toutes les autres cartes valent 0 point.

Déterminer la loi de probabilité de X.

! Remarque

On note que pour chacun de ces tableaux, la somme des probabilités élémentaires fait 1, en accord avec l'un des axiomes des probabilités !

5.3 Espérance d'une variable aléatoire

Définition:
Soit X une variable aléatoire discrète, on appelle **espérance** de la variable aléatoire X le réel noté $\mathbb{E}(X)$ qui vaut :

$$\mathbb{E}(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i.$$

! Remarque

Ce nombre important en probabilités représente la valeur moyenne de la variable aléatoire X.

Exercice:
On reprend le jeu de cartes étudié précédemment. Calculer l'espérance de X.

5.4 Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Définition:
Soit X une variable aléatoire aléatoire discrète d'espérance $\mathbb{E}(X)$.

- On appelle **variance** de la variable aléatoire X le réel noté $\mathbb{V}(X)$ qui vaut :

$$\mathbb{V}(X) = p_1[x_1 - \mathbb{E}(X)]^2 + p_2[x_2 - \mathbb{E}(X)]^2 + \ldots + p_n[x_n - \mathbb{E}(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i[x_i - \mathbb{E}(X)]^2.$$

- On appelle **écart-type** de X le réel noté $\sigma(X)$ ou σ_X défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Exercice:
On reprend le jeu de cartes étudié précédemment. Calculer la variance puis l'écart-type de X.

Le théorème suivant permet un calcul plus facile de la variance :

Théorème

$$\mathbb{V}(X) = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \ldots + p_nx_n^2 - [\mathbb{E}(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 - [\mathbb{E}(X)]^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$$

Démonstration:
Le résultat découle immédiatemment de la linéarité de l'espérance.

Exemple:
Autre méthode de calcul de la variance pour le jeu de cartes :

- $\mathbb{V}(X) = \frac{5}{8} \times 0^2 + \frac{1}{8} \times 1^2 + \frac{1}{8} \times 3^2 + \frac{1}{8} \times 4^2 - 1^2$
- $\mathbb{V}(X) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{9}{8} + \frac{16}{8} - 1 = \frac{9}{4} = 2,25$.

Remarque

- La variance et l'écart-type d'une variable aléatoire réelle X sont des nombres positifs.
- L'écart-type mesure la dispersion des valeurs d'une variable aléatoire par rapport à son espérance.
- Si X est exprimé dans un certaine unité, σ_X l'est dans la même unité.

5.5 Lois fondamentales

5.5.1 Loi de Bernoulli

Définition:
Une **expérience de Bernoulli** est une expérience qui n'a que deux issues possibles, l'une appelée "succès" qui a pour probabilité p, l'autre appelée "échec" qui a pour probabilité $q = 1 - p$.
Définir une **loi de Bernoulli de paramètre** p, c'est associer une loi de probabilité discrète à cette expérience aléatoire en faisant correspondre la valeur 1 à l'apparition d'un succès et 0 à celle d'un échec.

x_i	1	0
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p	$1 - p$

Exemple:
Si on lance un dé et qu'on nomme "succès" l'apparition de la face 6, on obtient la loi de Bernoulli suivante :

x_i	1	0
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Propriété:
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernouilli $\mathcal{B}(p)$, alors :

- L'espérance de X vaut $\mathbb{E}(X) = p$.
- La variance de X vaut $\mathbb{V}(X) = pq$.

Démonstration:
On a $\mathbb{E}(X) = 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + 0 \times \mathbb{P}(X = 0) = p$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = p - p^2 = pq$.

Exercice:
Calculer l'espérance et l'écart-type de l'exemple précédent.

5.5.2 loi binomiale

Définition:
La **loi binomiale de paramètres** n **et** p, notée $\mathcal{B}(n; p)$ est la loi de probabilité du nombre de succès dans la répétition de n expériences de Bernouilli de paramètre p identiques et indépendantes.
Elle est définie par :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k} \quad , \quad \forall \; 0 \leq k \leq n$$

Exercice:
On lance 2 fois un dé bien équilibré. On s'intéresse à l'apparition de la face 6. Déterminer la loi de probabilité représentée par cette situation.

Propriété:
Soit X une variable aléatoire suivant une loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors :

- L'espérance de X vaut $E(X) = np$.
- La variance de X vaut $V(X) = npq$.

Démonstration:
On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np(1-p) \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k-1} \\
&= np(1-p) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-j} \\
&= np(1-p) \;\text{ par binôme de Newton}
\end{aligned} \tag{1}$$

On effectue de même avec la variance mais avec un peu plus de calcul...

Exercice:
Calculer l'espérance et l'écart-type de l'exercice précédent.

5.5.3 loi de Poisson

La loi de Poisson modélise des situations où l'on s'intéresse au nombre d'occurrences d'un événement dans un laps de temps déterminé ou dans une région donnée. Par exemple :

- Nombre d'appels téléphoniques qui arrivent à un standard en x minutes,
- nombre de clients qui attendent à la caisse d'un magasin,
- nombre de défauts de peinture par m^2 sur la carrosserie d'un véhicule . . .

Définition:
La variable aléatoire X suit une **loi de Poisson de paramètre** λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ lorsque sa loi de probabilité vérifie :

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad , \quad \forall k \in .$$

Exercice:
On considère la variable aléatoire X mesurant le nombre de clients se présentant au guichet 1 d'un bureau de poste par intervalle de temps de durée 10 minutes entre 14h30 et 16h30.
On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.

1. Compléter le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\mathbb{P}(X = k)$															

2. Calculer la probabilité qu'exactement 10 personnes arrivent au bureau de poste entre 14h30 et 14h40.
3. Calculer la probabilité qu'au plus 3 personnes arrivent au bureau de poste entre 15h40 et 15h50.
4. Calculer la probabilité qu'au moins 8 personnes arrivent au bureau de poste entre 16h20 et 16h30.

Propriété:
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ, alors l'espérance et la variance sont égales et valent $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$.

Démonstration:
On a :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} = \lambda$$
et
$$\mathbb{V}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} - \lambda^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)\lambda^{k+1} e^{-\lambda}}{k!} - \lambda^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+2} e^{-\lambda}}{k!} + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$
Exemple:
Dans l'exemple précédent, on obtient $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = 5$.