

Chapitre 3 : Configurations géométriques

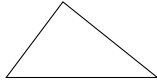
Table des matières

Chapitre 3 : Configurations géométriques	1
Axel CARPENTIER	
1 Périmètres, aires et volumes	3
1.1 Formules usuelles de calcul de périmètres et d'aires	3
1.2 Formules usuelles de calcul de volumes	4
2 Géométrie du triangle	5
2.1 Outils élémentaires	5
2.2 Outils avancés	7
3 Repérage	8
3.1 Repérage d'un point dans le plan	8
3.2 Repérage d'un point dans l'espace	9

1 Périmètres, aires et volumes

1.1 Formules usuelles de calcul de périmètres et d'aires

- Triangle:



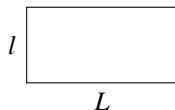
- Périmètre : $\mathcal{P}_{triangle} = \text{somme des longueurs}$
- Aire : $\mathcal{A}_{triangle} = \frac{\text{Côté} \times \text{Hauteur relative à ce côté}}{2}$

- Carré:



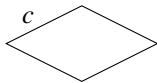
- Périmètre : $\mathcal{P}_{carré} = 4 \times c$
- Aire : $\mathcal{A}_{carré} = c^2$

- Rectangle:



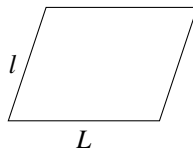
- Périmètre : $\mathcal{P}_{rectangle} = 2 \times (L + l)$
- Aire : $\mathcal{A}_{rectangle} = L \times l$

- Losange:



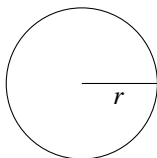
- Périmètre : $\mathcal{P}_{losange} = 4 \times c$
- Aire : $\mathcal{A}_{losange} = \frac{\text{Grande diagonale} \times \text{Petite diagonale}}{2}$

- Parallélogramme:



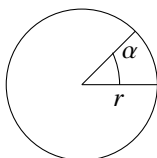
- Périmètre : $\mathcal{P}_{parallélogramme} = 2 \times (L + l)$
- Aire : $\mathcal{A}_{parallélogramme} = \text{Côté} \times \text{Hauteur relative à ce côté}$

- Cercle:



- Périmètre : $\mathcal{P}_{cercle} = 2 \times \pi \times r$
- Aire : $\mathcal{A}_{cercle} = \pi \times r^2$

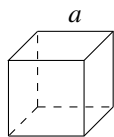
- Arc de cercle:



- Périmètre : $\mathcal{P}_{arc} = \alpha \times r$ pour α en radians
- Aire : $\mathcal{A}_{arc} = \frac{\alpha \times r^2}{2}$ pour α en radians

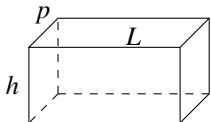
1.2 Formules usuelles de calcul de volumes

- **Cube:**



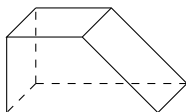
– Volume : $\mathcal{V}_{cube} = a^3$

- **Pavé droit:**



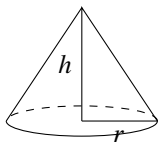
– Volume : $\mathcal{V}_{pavé} = L \times h \times p$

- **Prisme droit:**



– Volume : $\mathcal{V}_{prisme} = \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$

- **Cône:**



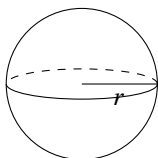
– Volume : $\mathcal{V}_{cône} = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}$

- **Pyramide:**



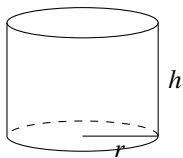
– Volume : $\mathcal{V}_{pyramide} = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$

- **Boule:**



– Volume : $\mathcal{V}_{boule} = \frac{4 \times \pi \times r^3}{3}$

- **Cylindre:**



– Volume : $\mathcal{V}_{cylindre} = \pi \times r^2 \times h$

Exercice:

1. Calculer l'aire d'une sphère de rayon 5cm.
2. Dans un cube $ABCDEFGH$ d'arête 6cm, on place les points I , J et K , milieux respectifs de $[EF]$, $[FG]$ et $[BF]$.
Calculer le volume exact du tétraèdre $FIJK$.
3. Calculer le volume d'une boule de rayon 3cm.
4. Calculer le volume d'un cylindre de rayon 5cm et de hauteur 4cm.

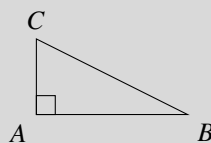
2 Géométrie du triangle

2.1 Outils élémentaires

2.1.1 Théorème de Pythagore

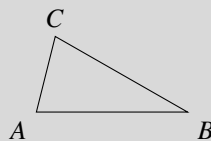
Théorème:

- **Sens direct:** Dans un triangle ABC rectangle en A comme suit : On considère un triangle rectangle en A :



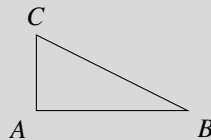
On a $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

- **Contraposée:** Dans un triangle ABC de plus grand côté BC comme suit : On considère un triangle rectangle en A :



Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle n'est pas rectangle.

- **Réciproque:** Dans un triangle ABC de plus grand côté BC comme suit : On considère un triangle rectangle en A :



Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle est rectangle en A .

Exercice:

1. Soit un triangle ABC rectangle en B tel que $AC = 5$ et $AB = 2$. Calculer BC .
2. Le triangle ABC tel que $AC = 7$, $AB = 6$ et $BC = 3$ est-il rectangle ? Si oui, en quel point ?

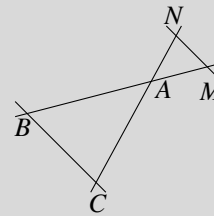
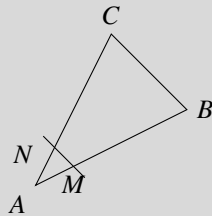
2.1.2 Théorème de Thalès

Théorème:

- **Sens direct:** Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A . Si $(MN) \parallel (BC)$, alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

- **Contraposée:** Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A . Si les deux premiers quotients de l'égalité ne sont pas égaux, alors les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.
- **Réciproque:** Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A . Si les deux premiers quotients de l'égalité sont égaux, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

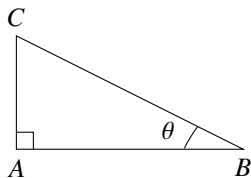


Exercice:

1. Soient (BM) et (CN) deux droites se coupant en A . On suppose que les droites (MN) et (BC) sont parallèles et $AM = 4$, $AN = 3$, $AB = 1$ et $BC = 5$. Calculer les longueurs AC et MN .
2. Soient (BM) et (CN) deux droites se coupant en A . On suppose que $MN = 3$, $AB = 12$, $BC = 6$, $AB = 4$. Les droites (BM) et (CN) sont-elles parallèles ?

2.1.3 Trigonométrie

Dans un triangle rectangle, les trois relations trigonométriques relient les cosinus, sinus et tangente d'un angle du triangle, aux côtés du triangle.



- $\cos(\theta) = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$
- $\sin(\theta) = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$
- $\tan(\theta) = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} = \frac{AC}{AB}$

Exercice:

Soit un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ et $AC = 3$.

1. Déterminer la valeur exacte puis approchée à 10^{-1}° de l'angle $\theta = \widehat{ABC}$.
2. En déduire la valeur exacte puis approchée à 10^{-1} de BC .

2.2 Outils avancés

2.2.1 Loi des sinus

Théorème:

Soit ABC un triangle quelconque. On note : $\begin{cases} a = BC & b = CA & c = AB \\ \hat{A} = \widehat{BAC} & \hat{B} = \widehat{ABC} & \hat{C} = \widehat{BCA} \end{cases}$

On a alors :

$$\frac{\sin(\hat{A})}{a} = \frac{\sin(\hat{B})}{b} = \frac{\sin(\hat{C})}{c}$$

Exercice:

1. Soit ABC un triangle tel que $AC = 4,09$, $BC = 13,26$ et $\hat{C} = 50^\circ$. Calculer $\hat{A}$ à 10^{-2}° près.
2. Soit ABC un triangle tel que $AB = 7,8$, $BC = 6,9$ et $\hat{B} = 51^\circ$. Calculer $\hat{C}$ à 10^{-2}° près.

2.2.2 Théorème d'Al-Kashi

Théorème:

Soit ABC un triangle quelconque. On note : $\begin{cases} a = BC & b = CA & c = AB \\ \hat{A} = \widehat{BAC} & \hat{B} = \widehat{ABC} & \hat{C} = \widehat{BCA} \end{cases}$

$$\text{Alors : } \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A}) \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos(\hat{B}) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C}) \end{cases}$$

Démonstration:

En effet :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{BA}\|^2 + 2 \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC} \rangle + \|\overrightarrow{AC}\|^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + CA^2 - 2 \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$$

$$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + CA^2 - 2 \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$$

Exercice:

Soit ABC un triangle tel que $AC = 4,09$, $BC = 13,26$ et $\hat{A} = 113,63^\circ$.

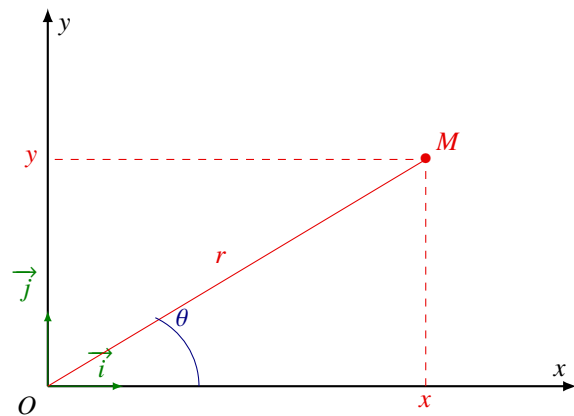
1. Montrer que $AB \approx 11,08$
2. En déduire la valeur approchée à 10^{-2} près de la mesure en degrés de l'angle $\hat{A}$.

3 Repérage

3.1 Repérage d'un point dans le plan

Dans le plan, muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ direct, tout point M peut être repéré par :

- Les **coordonnées cartésiennes** $(x; y)$ avec x et y tels que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
- Les **coordonnées polaires** $(r; \theta)$ avec $r = OM$ et $\theta = (\vec{i} ; \vec{OM})$



! Remarque

- En connaissance des coordonnées cartésiennes d'un point $(x; y)$, on peut déterminer ses coordonnées polaires $(r; \theta)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$ et $\sin(\theta) = \frac{y}{r}$.
- En connaissance des coordonnées polaires d'un point $(r; \theta)$, on peut déterminer ses coordonnées cartésiennes $(x; y)$ avec $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$.

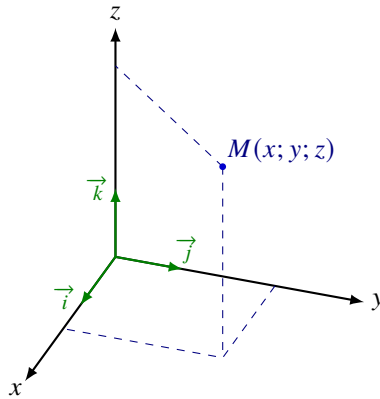
Exercice:

1. On considère le point $A(3; 3)$ dans le plan. Déterminer ses coordonnées polaires $(r_A; \theta_A)$.
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes du point $C\left(3; \frac{2\pi}{3}\right)$.

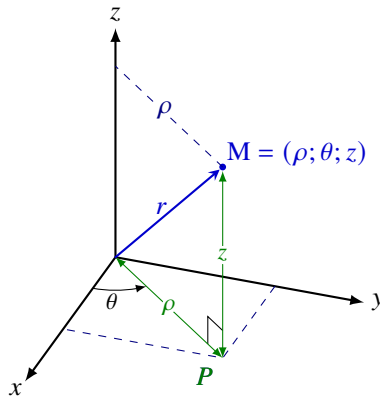
3.2 Repérage d'un point dans l'espace

Dans l'espace, muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ direct, tout point M peut être repéré par :

- **Les coordonnées cartésiennes** $(x; y; z)$ avec x, y et z tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

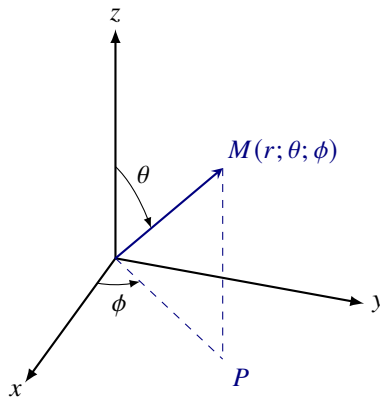


- **Les coordonnées cylindriques** $(\rho; \theta; z)$ avec $\rho = OP$ et $\theta = (\vec{i} ; \overrightarrow{OP})$.



On a alors
$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

- **Les coordonnées sphériques** $(r; \theta; \phi)$ avec $r = OM$, la longitude $\theta = (\vec{i} ; \overrightarrow{OP}) \in [0; 2\pi[$ et la latitude $\phi = (\overrightarrow{OP} ; \overrightarrow{OM})$ et $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.



On a alors
$$\begin{cases} x = \rho \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = \rho \cos(\theta) \end{cases}$$

! Remarque

- En connaissance des coordonnées cartésiennes d'un point $(x; y; z)$, on peut déterminer ses coordonnées cylindriques $(r; \theta; z)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$ et $\sin(\theta) = \frac{y}{r}$.
 - En connaissance des coordonnées cartésiennes d'un point $(x; y; z)$, on peut déterminer ses coordonnées sphériques $(r; \theta; \phi)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $\sin(\phi) = \frac{z}{r}$ et $\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
-

Exercice:

On considère le point $A(0; 2\sqrt{3}; -2)$ dans l'espace. Déterminer ses coordonnées sphériques $(r_A; \theta_A; \phi_A)$.