

Chapitre 1 : Fonctions de la variable réelle

Axel Carpentier

Brevet de technicien supérieur :

Enveloppe des bâtiments, conception et réalisation

Table des matières

1. Fonctions usuelles

- 1.1 Fonctions en escalier
- 1.2 Fonctions affines
- 1.3 Fonction exponentielle
- 1.4 Fonction logarithme népérien
- 1.5 Fonctions puissances
- 1.6 Fonctions trigonométriques

2. Limites

- 2.1 Interprétation graphique
- 2.2 Limites des fonctions usuelles
- 2.3 Opérations sur les limites
- 2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

2.5 Croissances comparées

3. Dérivation

- 3.1 Nombre dérivé
- 3.2 Fonction dérivée
- 3.3 Opérations
- 3.4 Dérivées successives
- 3.5 Equation de la tangente
- 3.6 Développements limités

4. Etude des variations d'une fonction

- 4.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction
- 4.2 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

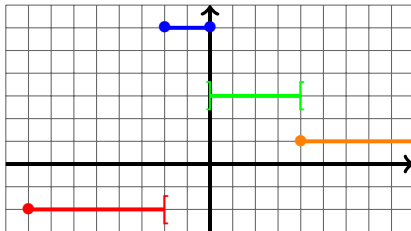
Définition:

Une fonction en escalier est une fonction constante par intervalles.

Exemple:

On considère la fonction définie pour tout $x \in [-8; +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -8 \leq x < -2 \\ 6 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \leq x \end{cases} \quad \text{dont on donne la représentation graphique ci-dessous.}$$



Définition:

Soient $(m, p) \in \mathbb{R}^2$, une fonction affine f est une fonction de la forme $f : x \mapsto mx + p$ où m est le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.

Exemple:

La fonction $f : x \mapsto 2x + 1$ est affine mais $f : x \mapsto 3x^2 - 5$ ne l'est pas.

Exemple:

Soit la fonction affine définie par $f : x \mapsto 5x + 2$, 5 est le coefficient directeur et 2 est l'ordonnée à l'origine

Remarque

Une fonction affine est simplement l'application du programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
- Multiplier par m
- Ajouter p

Définition:

Soient $x_1 \leq x_2$ deux réels quelconques et f une fonction affine.

- f est dite croissante si $f(x_1) \leq f(x_2)$ c'est-à-dire qu'elle conserve l'ordre.
- f est dite décroissante si $f(x_1) \geq f(x_2)$ c'est-à-dire qu'elle renverse l'ordre.

Exemple:

La fonction $f : x \mapsto 3x + 2$ est croissante alors que la fonction $g : x \mapsto -3x + 2$ est décroissante.

Théorème:

Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine.

- Si $m > 0$ alors la fonction est croissante.
- Si $m < 0$ alors la fonction est décroissante.
- Si $m = 0$ alors la fonction est constante.

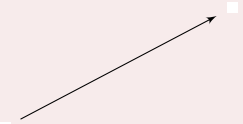
Exercice:

Quel est le sens de variation des fonctions suivantes ?

- $f : x \mapsto 8$
- $g : x \mapsto -3x + 5$
- $h : x \mapsto x$

Remarque

Les variations d'une fonction affine $f : x \mapsto mx + p$ peuvent être résumées dans un tableau dit de variation. Exemple si $m > 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
f		

Définition:

Soit f une fonction quelconque.

- f est positive sur un intervalle I si $\forall x \in I, f(x) > 0$.
- f est négative sur un intervalle I si $\forall x \in I, f(x) < 0$.

Remarque

- Déterminer si une fonction est positive ou négative revient à résoudre une inéquation.
- Si une fonction affine f est non constante, alors il existe un unique réel r pour lequel $f(r) = mr + p = 0$. D'où $r = -\frac{p}{m}$.

Signe d'une fonction affine

Exercice :

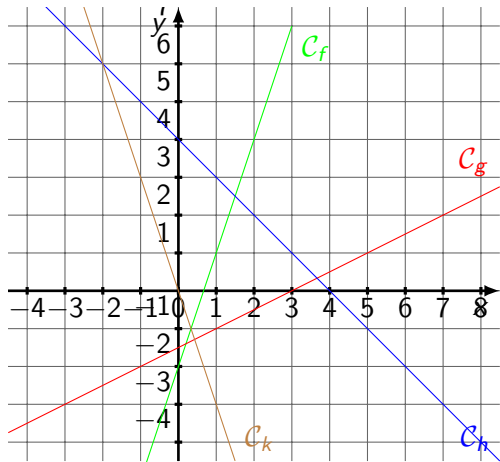
Associer à chaque droite sa représentation graphique

1. $d_1 : y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

2. $d_2 : y = 3x - 2$

3. $d_3 : y = -3x$

4. $d_4 : y = -x + 4$



Définition et caractérisation

Propriété:

Parmi toutes les fonctions $x \mapsto a^x$, il en existe dont la tangente à la courbe représentative au point $(0; 1)$ a pour coefficient directeur 1.

Définition:

Cette fonction est la fonction exponentielle de base e , notée $\exp$, définie par $\exp : x \mapsto e^x$. Le réel e est environ égal à 2,718.

Remarque

On a $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

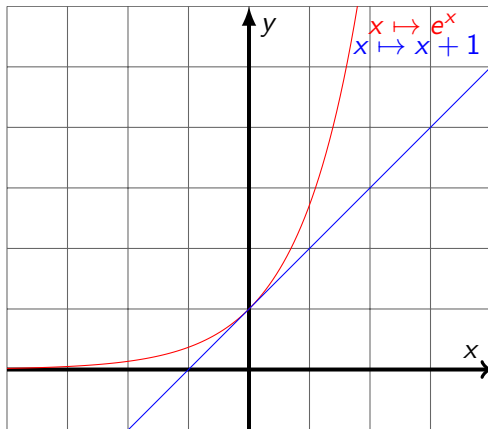
Propriété:

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Propriété:

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Propriété:

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

Remarque

Cette propriété se généralise pour plusieurs facteurs.

Exercice:

Simplifier les expressions suivantes :

- $A = e^3 \times e^{-4} \times e^2$
- $B = \frac{e^{-3}}{e^2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, C(x) = (e^{3x})^2$
- $\forall x \in \mathbb{R}, D(x) = e \times (e^x)^{-4}$

Propriété:

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

- $e^a = e^b \iff a = b$
- $e^a > e^b \iff a > b$

Exercice:

Résoudre les équations et les inéquations suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- $e^x = e^6$
- $e^x < e^{-2}$
- $e^{x^2} - e^{-2} = 0$
- $e^{x^2+5x} - e^6 < 0$

Définition:

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle logarithme népérien de a l'unique solution de l'équation $e^x = a, x \in \mathbb{R}$. Autrement dit on a :

$$e^x = a \iff x = \ln(a)$$

Remarque

- On a $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.
- On notera $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïtés.
- Le logarithme népérien d'un nombre réel nul ou négatif n'existe pas :
- (*Hors programme*) L'unicité du logarithme népérien découle de la bijectivité de la fonction exponentielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété :

- Soit $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$

Exemple:

- $e^{\ln(5)} = 5$
- $\ln(e^{-0,1}) = -0,1$
- $\ln(\sqrt{e}) = \ln(e^{0,5}) = 0,5$

Exercice:

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $e^{3x+2} = 5$

Définition:

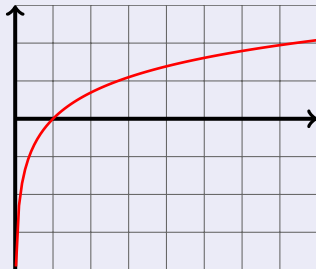
On appelle fonction logarithme népérien la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\ln : x \mapsto \ln(x)$.

Propriété:

La fonction logarithme est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Propriété:

- La fonction logarithme est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On a de plus :
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$



Propriété:

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$:

- $a = b \iff \ln(a) = \ln(b)$
- $a < b \iff \ln(a) < \ln(b)$

Propriété:

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Corollaire:

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$:

- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \ln(a)$
-

Exercice:

1. Simplifier les expressions suivantes :

- $A = \ln(1000) - \ln(0,1) + \ln(0,01)$

- $B = \ln(32) - 7\ln(2) + \ln\left(\frac{1}{8}\right)$

2. Dans chacun des cas, déterminer le plus petit entier n solution de l'inéquation :

- $0,92^n \leq 0,75$

- $0,2 \geq \left(1 - \frac{9}{100}\right)^n$

3. Résoudre le système d'équation :
$$\begin{cases} \ln(x\sqrt{y}) &= 9 \\ 2\ln(x) + \ln(y^3) &= 0 \end{cases}$$

Définition:

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction puissance d'exposant α , notée f_α est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par :

$$f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

Exemple:

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, on a $f_{\frac{1}{2}}(x) = x^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \ln(x)} = \sqrt{x}$.

Propriété:

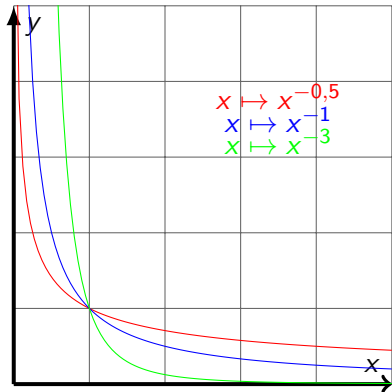
La fonction puissance f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Le signe de la dérivée dépend du signe de α , on a alors par exemple si $\alpha < 0$:

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	—
f	$+\infty \rightarrow 0$

Sens de variation

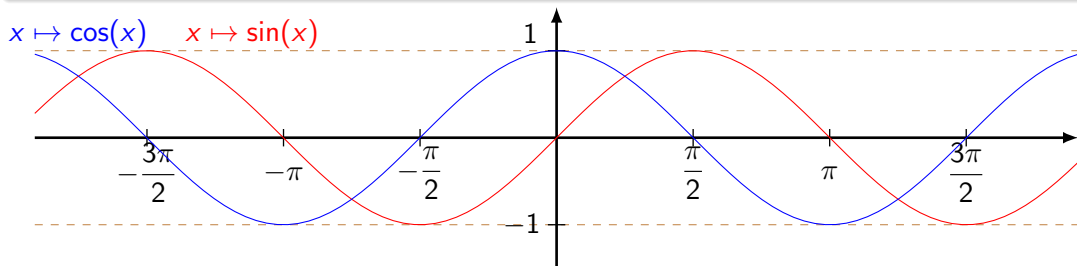
On représente ci-dessous différentes représentations graphiques de fonctions puissances pour diverses valeurs de α .



Définition et représentation graphique

Définition:

- La fonction cosinus est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \cos(x)$.
- La fonction sinus est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin(x)$.



Définition/Propriété:

$\forall (x, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$ et $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$.

On dira alors que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π , ou encore simplement 2π -périodiques.

Cela signifie que l'on retrouve la même "parcelle de courbe" sur chaque intervalle de longueur 2π .

Définition:

- Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est une fonction paire. C'est-à-dire qu'une fonction f quelconque est paire si et seulement si $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = f(x)$.
- Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère est une fonction impaire. C'est-à-dire qu'une fonction f quelconque est impaire si et seulement si $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = -f(x)$.

Propriété:

- La fonction cosinus est paire, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$.
- La fonction sinus est impaire, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Exercice:

Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(x) - \sin(2x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est impaire.

Définition:

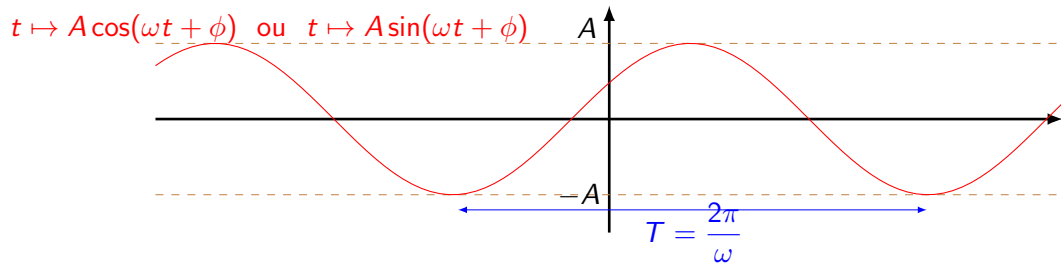
Une fonction sinusoidale a une expression de la forme $t \mapsto A \cos(\omega t + \phi)$ ou $t \mapsto A \sin(\omega t + \phi)$.

- A est un réel positif qui représente l'amplitude du signal, c'est-à-dire la valeur maximale prise par la fonction.
- $(\omega t + \phi)$ est la phase instantanée avec :
 - ω : la pulsation, un réel qui s'exprime en radians par secondes.
 - ϕ : un réel s'exprime en radians qui représente la phase à l'origine, c'est-à-dire à l'instant $t = 0$.

Propriété:

- Les fonctions sinusoïdales sont périodiques de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, exprimé en secondes.
- La fréquence, qui correspond au nombre de périodes par unité de temps est $f = \frac{1}{T}$, elle s'exprime en Herz (Hz).
- La fréquence, la pulsation et la période sont liées par : $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

Fonctions sinusoidales

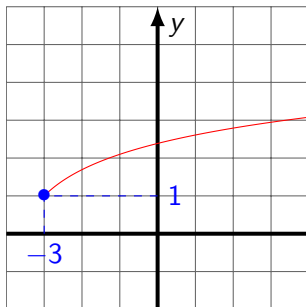


Exercice:

Déterminer la période et la phase à l'origine de la fonction sinusoidale donnée par

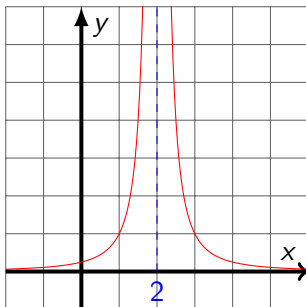
$$f(t) = -2 \cos\left(5t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Limite en un point



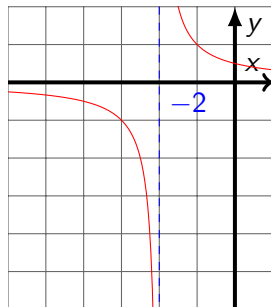
$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 1$$

Il n'y a pas d'asymptote.



$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$

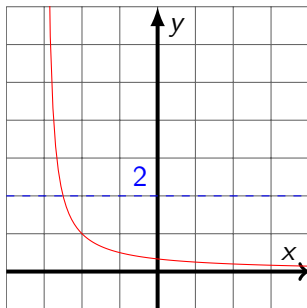
La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.



$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

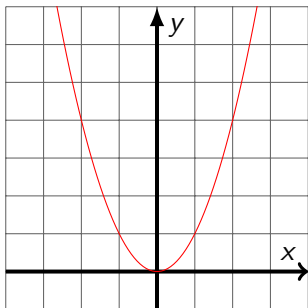
La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

Limite en ∞



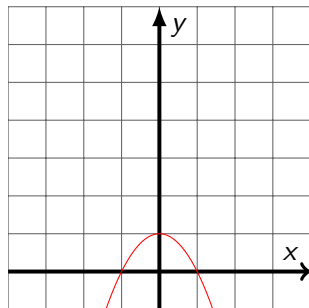
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Il n'y a pas d'asymptote.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Il n'y a pas d'asymptote.

Définition:

Soit f une fonction et d la droite d'équation $y = ax + b$ tel que :

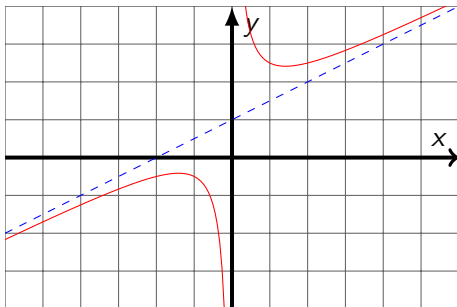
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

on dit alors que la droite d est une asymptote oblique à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.

Limite en ∞

Exemple:

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x + 1$ définie sur $\mathbb{R}^*$.



On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

La courbe admet donc une asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Exercice:

Soit le tableau de variation d'une certaine fonction f :

x	$-\infty$	-5	-3	0	$+\infty$
$f(x)$	-2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	3
	$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		$-\infty$		-4	

1. Déterminer les asymptotes verticales en précisant leur équation.
2. Déterminer les asymptotes horizontales en précisant leur équation.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

Limites des fonctions usuelles

	x^n	$\frac{1}{x^n}$	$x^\alpha, \alpha > 0$	$\frac{1}{x^\alpha}, \alpha > 0$	$\ln(x)$	$\exp(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\lim_{x \rightarrow -\infty}$	$\pm\infty$	0	indéfini	indéfini	indéfini	0	aucune	aucune
$\lim_{x \rightarrow 0^-}$	0	$\pm\infty$	indéfini	indéfini	indéfini	1^-	1^-	0^-
$\lim_{x \rightarrow 0^+}$	0^+	$+\infty$	0^+	$+\infty$	$-\infty$	1^+	1^+	0^+
$\lim_{x \rightarrow +\infty}$	$+\infty$	0^+	$+\infty$	0^+	$+\infty$	$+\infty$	aucune	aucune

Limite d'une somme

$\lim f =$	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g =$	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f + g =$	$l + l'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

Exercice:

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x^3)$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} + x^2 \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + x^3)$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x^3)$

Limite d'un produit

$\lim f =$	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim g =$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim f \times g =$	$l \times l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I

Exercice:

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 3) \times (e^x - 2)$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \times (x - 3) \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) \times x^3$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) \times \frac{1}{x}$

Limite d'un quotient

$\lim f =$	l	l	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim g =$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0	l'	$\pm\infty$	0
$\lim \frac{f}{g} =$	$\frac{l}{l'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I	F.I

Exercice:

Calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 3}{e^x - 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - 3}{x^2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{x^3}$$

Propriété:

Soient $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$.

Si $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c \end{array} \right\}$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$

Exercice:

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x+3}$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(2x + 1)$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x + 4}$

Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

Les quatre cas d'indétermination des limites sont :

$\lim f$	$\lim g$	Limite indéterminée	Type d'indétermination
$+\infty$	$-\infty$	$f(x) + g(x)$	$\infty - \infty$
0	$\pm\infty$	$f(x) \times g(x)$	$0 \times \infty$
0	0	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{0}{0}$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{\infty}{\infty}$

Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

Remarque

Lorsqu'on a une forme indéterminée, cela signifie qu'on ne peut pas conclure directement, il faut donc lever l'incertitude en factorisant ou en développant.

Exercice:

Calculer les limites suivantes en explicitement le type d'indétermination:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - x$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 3}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}(x^2 + 1)$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

Croissances comparées

Propriété:

Pour tout réel $\alpha > 0$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

Remarque

L'idée à retenir, en $+\infty$, est l'ordre de prépondérance " $\ln(x) \ll x^\alpha \ll e^x$ ".

Corollaire:

Pour tout réel $\alpha > 0$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^x = 0$$

Rappels:

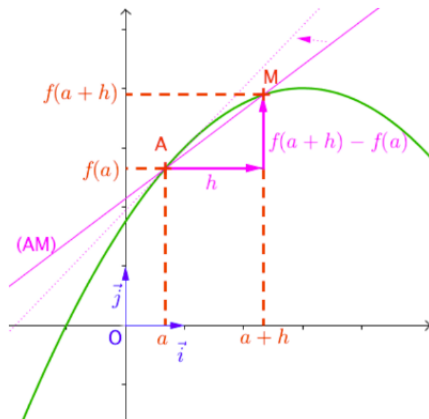
Soit une fonction affine $f : x \mapsto mx + p$ dont la droite représentative passe par les points $A(x_1, f(x_1))$ et $B(x_2, f(x_2))$. Alors le coefficient directeur de la fonction f est donné par :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

qui est le taux de variation entre les points x_1 et x_2 .

Nombre dérivé

On considère une fonction f quelconque. On s'intéresse aux points de coordonnées $A(a, f(a))$ et $M(a + h, f(a + h))$



Nombre dérivé

D'après le rappel précédent, on peut donc calculer le coefficient directeur de la droite (AM) qui est donné par :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Lorsque le point M se rapproche de A , on va avoir que h se rapproche de plus en plus de 0. Ceci signifie donc que le coefficient directeur de la droite (AM) va être égal à la limite de $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ quand h tend vers 0.

Définition:

Ce coefficient directeur s'appelle le nombre dérivé de f en a , noté $f'(a)$ et on a :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

On dira que f est dérivable en a .

Remarque

Il se peut que la limite ne soit pas finie, on dira que f n'est pas dérivable en a . C'est le cas de la fonction racine carrée en 0.

Exercice:

Soit $f : x \mapsto x^2$, calculer $f'(2)$.

Définition:

Soit f une fonction dérivable en tout point x d'un intervalle I , alors la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelé fonction dérivée de f sur I .

Fonction dérivée

On obtient le tableau de dérivation suivant :

	Fonction f	Dérivée f'
Constante	$f(x) = a$	$f'(x) = 0$
Affine	$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
Inverse	$f(x) = \frac{a}{x}, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = -\frac{a}{x^2}$
Racine carrée	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Puissance	$f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
Logarithme	$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
Exponentielle	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
Cosinus	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
Sinus	$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$

Exercice:

Dériver les fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivabilité :

- $f : x \mapsto 4x - 3$
- $g : x \mapsto 2x^5$
- $h : x \mapsto \frac{2}{x}$
- $p : x \mapsto -\cos x$

Opérations

Soit u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

On a ci-dessous un récapitulatif d'opérations de dérivation :

Fonction	Dérivée
$ku, k \in \mathbb{R}$	ku'
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$u^n, n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$v \circ u$	$u' \times (v' \circ u)$

Exercice:

Pour chaque fonction f , exprimer $f'(x)$ en fonction de x .

1. $f(x) = 3(x^2 + 4)$

2. $f(x) = (-2x + 3)(5x - 3)$

3. $f(x) = (2x^2 - 7)^4$

4. $f(x) = \frac{3x - 4}{x^2 + 3}$

5. $f(x) = \frac{1}{-3x + 1}$

6. $f(x) = e^{3x+1}$

7. $f(x) = \ln(-2x + 5)$

8. $f(x) = \cos(2x + 1)$

Définition:

Soit f une fonction dérivable. Lorsque cela est possible, on définit les dérivées successives de f , notée :

$$f' ; f'' ; f^{(3)} ; \dots ; f^{(n)}$$

Remarque

En physique et en mécanique, on utilise la notation différentielle :

$$\frac{df}{dt} = f' \quad \text{et} \quad \frac{d^2f}{dt^2} = f''$$

Exercice:

Soit $f : x \mapsto 2x^3 - x^2 + x + 3$ définie sur $\mathbb{R}$. Exprimer $f^{(5)}(x)$ en fonction de x .

Equation de la tangente

Définition:

La courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente (T) de coefficient directeur $f'(a)$.

Remarque

La tangente à une courbe en un de ses points est une droite qui "touche" la courbe au plus près au voisinage de ce point.

La tangente est une droite de coefficient directeur $f'(a)$ donc a pour expression :
 $(T) : y = f'(a)x + b$. Or $A(a, f(a)) \in (T)$ d'où $f(a) = f'(a)a + b$ et donc au final on a l'équation de la tangente donnée par :

$$(T) : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Méthode:

Soit f une fonction quelconque et $A(a, f(a))$ sur le courbe de f . On veut déterminer la tangente à la courbe de f au point A :

- Déterminer $f(a)$ si on ne le connaît pas déjà ;
- Déterminer le nombre dérivé $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$;
- La tangente au point A est donc de la forme $y = f'(a)x + b$, pour déterminer b on évalue l'équation de la tangente au point A ;
- Représenter graphiquement la tangente revient à tracer une fonction affine.

Equation de la tangente

Exercice:

Déterminer l'équation de la tangente des fonctions suivantes aux points suivants:

- $f(x) = x^2$ au point $A(1, 1)$.
- $f(x) = x^3$ au point $A(1, 1)$.

Exercice:

Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a dans les cas suivants :

- $a = -3$, $f(-3) = 1$ et $f'(-3) = 2$.
- $a = 5$, $f'(5) = -5$ et la tangente passe par le point de coordonnées $(1, -1)$.
- $a = 1$, $f(1) = 3$ et (T) est parallèle à la droite d'équation $y = x - 1$.

Définition:

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0.
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = P_n(x) + x^n \epsilon(x) \text{ où } \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0.$$

ou sous forme développée

$$f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \epsilon(x)$$

On dit que $P_n(x)$ est la partie régulière du développement limité et $x^n \epsilon(x)$ est le le reste.

Au voisinage de zéro, on a :

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x).$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n \epsilon(x).$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + x^n \epsilon(x).$

Développements limités usuels

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^n \epsilon(x).$

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^n \epsilon(x).$

-

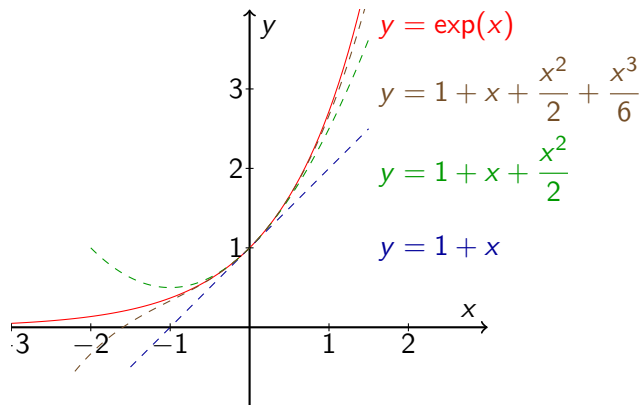
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \epsilon(x).$$

Interprétation graphique

Graphiquement, on obtient à différents ordres des approximations de la fonction au voisinage de 0.

Plus l'ordre est élevée, meilleure est l'approximation !

On a donc par exemple pour la fonction exponentielle.



Propriété fondamentale:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est strictement croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) > 0$;
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) < 0$;
- f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) = 0$;

Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

Exemple:

On cherche à étudier les variations de la fonction $f(x) = 2x^2 + 8x - 5$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- On commence par déterminer la dérivée de f .
On a $f'(x) = 4x + 8$.
- On étudie le signe de cette dérivée.
On a $f' < 0$ sur $] -\infty; -2[$ et $f' > 0$ sur $] -2; +\infty[$.
- On en déduit les variations de f par la propriété fondamentale.
On a f strictement décroissante sur $] -\infty; -2[$ et strictement croissante sur $] -2; +\infty[$.

Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

- On trace le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(-2)$	$+\infty$

- On cherche les extremums de la fonction f .
On a que f' ne s'annule que en -2 et change de signe donc f atteint son minimum en -2 qui vaut $f(-2)$.

Exercice:

Soit $f : x \mapsto 2x^2 + 1 - \ln(x)$ et $g : x \mapsto (x + 2)e^{-x}$, établir la tableau de variation de f et g sur leur intervalle de définition.

Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Propriété:

Si f est une fonction continue, dérivable et strictement croissante (resp. décroissante) sur un intervalle $[a; b]$ alors pour tout $\lambda \in [f(a); f(b)]$ (resp. $[f(b); f(a)]$), l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution unique sur l'intervalle $[a; b]$.

Exercice:

Soit $f : x \mapsto x^3 + x + 1$, prouver qu'il existe une solution de l'équation $f(x) = 0$ puis arrondir cette racine à 10^{-1} .