1 Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines et second degré

Exercice 1:
Préciser, pour les fonctions affines suivantes, les valeurs du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine puis justifier le sens de variation de la fonction.

1. $f(x) = 2x - \dfrac{3}{4}$
2. $g(x) = 7 - 3x$
3. $h(x) = \dfrac{2}{3}x - 5$

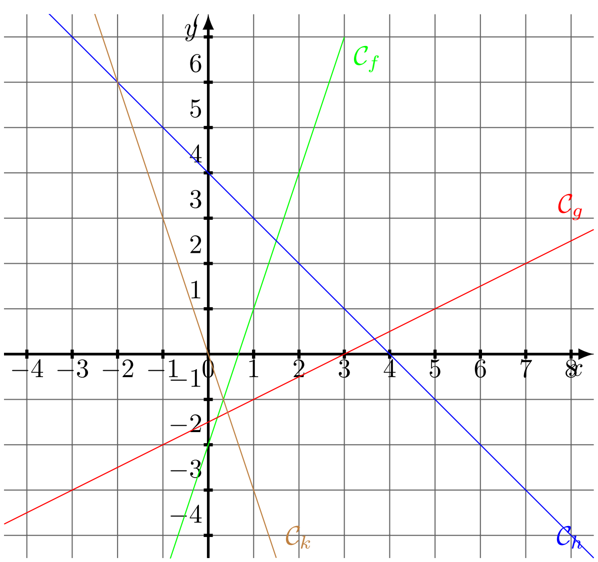
Exercice 2:

1. Déterminer la fonction affine f dont la représentation graphique est la droite $\mathcal{D}$ d'ordonnée à l'origine 6 et de coefficient directeur -5.
2. Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec l'axe des abscisses?

Exercice 3:
Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 1$. Représenter graphiquement la fonction f puis déterminer le signe de $f(x)$.

Exercice 4:
Soit g la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{4}{3}x - 1$. Représenter graphiquement la fonction f puis déterminer le signe de $g(x)$.

Exercice 5:
Déterminer graphiquement les expressions des fonctions affines f, g, h et k.



Exercice 6:

1. Déterminer la fonction affine f vérifiant $f(-1) = 4$ et $f(2) = -2$.
2. Déterminer la fonction affine g dont la représentation graphique est la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A(1;-1)$ et $B(3;4)$.

Exercice 7:
Résoudre les équations suivantes.

1. $-3x + 8 = 0$
2. $5x - 7 = 2 - 6x$
3. $\left(2x + \dfrac{5}{3}\right)(-4x + 5) = 0$

Exercice 8:
Résoudre les inéquations suivantes.

1. $5x - 3 < 0$
2. $4x + 1 > -2 - 3x$

Exercice 9:
A l'aide d'un tableau de signe, résoudre les inéquations suivantes :

1. $(2x - 1)(-4x + 3) > 0$
2. $(7 + 5x)(3x - 9) \geq 0$

Exercice 10:
Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 - 8x + 9 = 0$
2. $-x^2 + 3x + 4 = 0$
3. $2x^2 + x - 1 = 0$

Exercice 11:
Résoudre les inéquations suivantes :

1. $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$
2. $-7x^2 + 4x > 0$
3. $x^2 - 8x - 9 \leq 0$

1.2 Fonctions exponentielle et logarithme

Exercice 12:
Simplifier les expressions suivantes.

1. $A = e^4 \times e^7 \times e^{-2}$
2. $B = e \times (e^2)^3$
3. $C = \dfrac{e^{3x} \times e^x}{2e^{2x}}$
4. $D = \dfrac{e^{3x} + e^x}{e^x}$

Exercice 13:
Résoudre les équations suivantes.

1. $e^x = 1$
2. $e^x = -1$
3. $e^x = \dfrac{1}{e^2}$
4. $2e^x - 3 = 0$

Exercice 14:
Résoudre les équations suivantes :

1. $7 - e^{3x-1} = 0$
2. $(2e^x - 3)(e^{2x} - 8) = 0$
3. $e^{2x} + e^x - 6 = 0$ (On posera $X = e^x$).

Exercice 15:
Résoudre les inéquations suivantes.

1. $e^{3x-1} \geq 1$
2. $e^{5x+2} < e$
3. $-3e^{2x} + 5 > -1$

Exercice 16:
Simplifier les expressions suivantes pour les écrire en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$ seulement.

1. $A = \ln(10) - \ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$
2. $B = \ln\left(\dfrac{25}{8}\right)$
3. $C = 3\ln(5e^2) - \ln(20e^{-1})$

Exercice 17:
Simplifier les expressions suivantes.

1. $\ln(\sqrt{27}) - \dfrac{1}{2}\ln(9)$
2. $\dfrac{e^{\ln(5)}}{e^{2\ln(5)}}$
3. $2\ln(x) - \ln(3x)$

Exercice 18:
Résoudre les équations suivantes après avoir identifié l'intervalle de définition.

1. $\ln(x) - 3 = 0$
2. $5\ln(x) - 2 = 7$
3. $\ln(2x - 1) = 0$
4. $\ln(3x + 1) = 1$

Exercice 19:
Résoudre les équations suivantes après avoir identifié l'intervalle de définition.

1. $(\ln(x) + 2)(3\ln(x) - 4) = 0$
2. $\ln^2(x) = 4$
3. $\ln(x - 3) + \ln(2x + 1) = \ln(4)$
4. $\ln(x^2) = 1$

Exercice 20:
Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. $\ln(x) > 5$
2. $\ln(4x) \leq 0$
3. $1 - 2\ln(x) > 0$
4. $2\ln(x) - 3\ln(2) \geq 0$

1.3 Fonctions cosinus et sinus

Exercice 21:
A partir des valeurs remarquables, déterminer, à l'aide du cercle trigonométrique :

1. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$
2. $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$
3. $\cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$
4. $\sin\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$

Exercice 22:
Déterminer les cosinus et sinus des réels suivants :

1. $\dfrac{\pi}{6}$
2. $\dfrac{4\pi}{3}$
3. $-\dfrac{11\pi}{2}$

Exercice 23:
Résoudre les équations suivantes sur $[0; 2\pi[$.

1. $\cos(x) = 0$
2. $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
4. $2\sin(x) + 1 = 0$

Exercice 24:
Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\cos(x) < \dfrac{1}{2}$ sur $[0; 2\pi[$.
2. $\sin(x) > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $]-\pi; \pi]$.

Exercice 25:

1. L'équation $2\cos(x) - 2 = 0$ a-t-elle des solutions sur $\mathbb{R}$? Si oui, lesquelles ?
2. L'équation $\cos(x) - \sqrt{3} = 0$ a-t-elle des solutions sur $\mathbb{R}$? Si oui, lesquelles ?

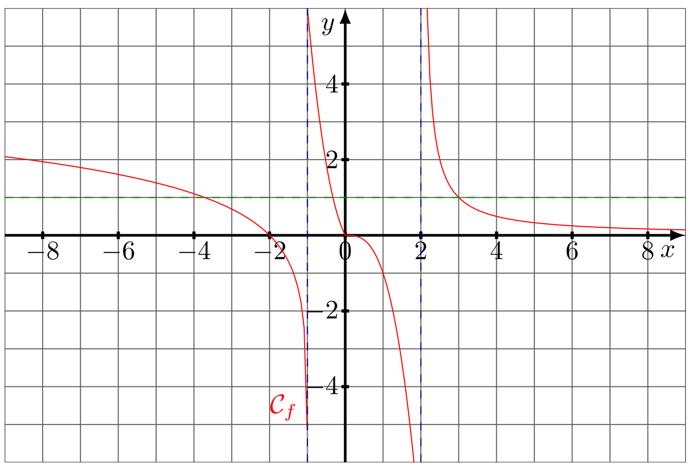
2 Limites

2.1 Limites et asymptotes

Exercice 26:
Déterminer les limites en $\pm\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$ | 2. $g(x) = 2x^4 + 3x^2 - 5$ | 3. $h(x) = x^3 - 5x^2 - 1$

Exercice 27:
Déterminer graphiquement les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction f dont la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous (il y a 6 cas de limites). En déduire les éqautions des asymptotes éventuelles à $\mathcal{C}_f$.



Exercice 28:
Calculer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left(3-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2}+5x\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2}+5x\right)$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(2x+\ln(x))$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(-3x+e^{-x})$
6. $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\left(\frac{e^x}{x}\right)$
7. $\displaystyle\lim_{x\to2^+}(\ln(x-2))$
8. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(4-x^2\right)(2x-3)$
9. $\displaystyle\lim_{x\to4^+}\left(2x-3+\frac{1}{x-4}\right)$
10. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{5}{1-2x}\right)$

Exercice 29:
Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x^2}{x-1}$ définie sur $]1;+\infty[$.

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to1^-} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat en termes d'asymptote.
2. (a) Démontrer que $f(x) = 2x+2+\dfrac{2}{x-1}$. En déduire que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x+2$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
   (b) Etudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}$.

2.2 Limites et formes indéterminées

Exercice 30:
Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

1. $f : x \mapsto x^3 - 2x$
2. $f : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{x^2-x}{x^3-2}$
4. $f : x \mapsto \dfrac{3x^3+2}{2x^2+4}$

2.3 Limites et composées

Exercice 31:
Déterminer les limites en $\pm\infty$ des fonctions suivantes.

1. $f(x) = e^{\frac{1}{x}+2}$ | 2. $g(x) = e^{-3x+2}$ | 3. $h(x) = (2x^3+x-2)^3$

Exercice 32:
Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{e^{5x+1}}{x}$ | 2. $g(x) = \ln(x) + e^{-2x}$ | 3. $h(x) = \ln(x^2 - 2x + 1)$

3 Dérivation

3.1 Fonctions dérivées

Exercice 33:
On considère la fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Calculer $f'(x)$ puis déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

2. Existe-t-il des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente sera parallèle à la droite d'équation $y = -9x + 2$? Si oui, déterminer leurs coordonnées.

Exercice 34:
Calculer la dérivée des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 2x - \dfrac{3}{4}$
2. $g(x) = 3x^2 - 8x + 7$
3. $h(x) = 2x^3 + x + 4$

Exercice 35:
Calculer la dérivée des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 2x + 1 + e^{-x}$
2. $g(x) = xe^x$
3. $h(x) = \sin(x) + 3\cos(x)$

Exercice 36:
Calculer la dérivée des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = (3x - 5)^3$
2. $g(x) = (2x+3)(e^x+1)$
3. $h(x) = 7x - 6 + e^{-2x}$

Exercice 37:
Calculer la dérivée des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 + 4x + 1}$
2. $g(x) = e^{-x}\sin(x)$
3. $h(x) = \ln(x^2 + 1)$

Exercice 38:
Calculer la dérivée des fonctions suivantes définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

1. $f(x) = -3\ln(x) + x^2 - 5x + 3$ sur $I =]0; +\infty[$
2. $g(x) = x\ln(x) - x + 4$ sur $I =]0; +\infty[$
3. $h(x) = \dfrac{x + 2 - \ln(x)}{x}$ sur $]0; +\infty[$
4. $k(x) = 2\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ sur $I = \mathbb{R}$.

3.2 Dérivées et sens de variation

Exercice 39:
Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 40:
Pour chaque fonction suivante, calculer sa dérivée, le signe de sa dérivée puis établir le tableau de variation de la fonction sur I

1. $f(x) = -3x^2 + 2x + 4$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$ sur $I =]0; +\infty[$
3. $h(x) = x + 3 - 5\ln(x - 1)$ sur $I =]1; +\infty[$

Exercice 41:
Pour chaque fonction suivante, calculer sa dérivée, le signe de sa dérivée puis établir le tableau de variation de la fonction sur I

1. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 3$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = x - \ln(x)$ sur $I =]0; +\infty[$
3. $h(x) = \dfrac{-2e^x}{x + 1}$ sur $I =]-1; +\infty[$

Exercice 42:
Pour chaque fonction suivante, calculer sa dérivée, le signe de sa dérivée puis établir le tableau de variation de la fonction sur I

1. $f(x) = e^{2x} - 2x + 3$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = x\ln(x)$ sur $I =]0; +\infty[$
3. $h(x) = \ln(1 + e^{-2x})$ sur $I = \mathbb{R}$

3.3 Equation du type $f(x) = k$

Exercice 43:
On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 6x - 7$ définie sur $[-3; 4]$.

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur $[-3; 4]$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-3; 4]$. Par balayage à la calculatrice, déterminer un encadrement de α à $0,01$ près.

Exercice 44:
On considère la fonction $f : x \mapsto x - 2 - 2\ln(x)$ définie sur $[1; 10]$.

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[1; 10]$.
2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur $[1; 10]$.
3. Justifier le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[1; 10]$. Par balayage à la calculatrice, déterminer un encadrement de chaque solution à $0,1$ près.

4 Problèmes

Problème 1:
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+2-\ln(x)}{x^2}$ définie sur $[1;25]$.

1. Démontrer que $f'(x) = \dfrac{-3+\ln(x)}{x^2}$.
2. Résoudre l'inéquation $-3+\ln(x) > 0$ sur $[1;25]$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[1;25]$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1;25]$. Par balayage à la calculatrice, déterminer un encadrement de α à $0,01$ près.
5. Une entreprise fabrique entre 100 et 2 500 objets par jour, le coût unitaire, en euros, pour x cnetaines d'objets produits est égal à $f(x)$. L'entreprise vend chaque objet $1,50$ euros pièce. A partir de quelle quantité d'objets produit et vendus, l'entreprise est-elle bénéficiaire ?

Problème 2:
On étudie l'évolution du pods, en grammes, d'une mouette rieuse en fonction du temps t en jours sur la côte méditerranéenne.
Deux modèles ont été établis par les scientifiques, le premier qui caractérise le poids de la mouette par la fonction

$$f_1(t) = 35e^{0,058t}$$

et le deuxième par la fonction

$$f_2(t) = \frac{350}{1+12e^{-0,15t}}$$

définies sur $[0;+\infty[$.

1. En calculant les dérivées des fonctions f_1 et f_2, étudier leurs sens de variation sur $[0;+\infty[$.
2. Calculer les limites en $+\infty$ des fonctions f_1 et f_2. Interpréter les résultats dans le contexte de l'exercice.
3. Sachant qu'à l'âge adulte, une mouette rieuse pèse environ 350 g et qu'elle atteint 90% de ce poids après 30 jours, quel est le modèle qui se rapproche le plus de ces observations ?

Problème 3:
Soit $f : x \mapsto 35e^{-1,5x} - 30$ définie sur $[0;+\infty[$.

Partie A

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = -24$ admet une unique solution α sur $[0;2]$. Par balayage à la calculatrice, déterminer un encadrement de α à 0,01 près.

Partie B

Un aliment est placé dans un tunnel de congélation mesurant 100 m de long et maintenu à une température de -30°C.
Lorsque cet aliment se déplace dans le tunnel pendant une durée t en heure, sa température est donnée par

$$T(t) = 35e^{-1,5t} - 30$$

1. Interpréter la limite en $+\infty$ obtenu dans la partie A dans le contexte de l'exercice.
2. Grâce aux résultats précédents, indiquer le temps nécessaire pour que la température de l'aliment placé dans le tunnel atteigne -24°C.
3. La vitesse du tapis roulant dans le tunnel peut varier de 0 à 200 m/h par tranche de 5 m/h. Quelle est la vitesse maximale que l'on peut choisir pour être certain que la température de l'aliment soit de -24°c à la sortie du tunnel ?

Problème 4:
L'entreprise Boisneuf fabrique des charpentes en bois. Elle souhaite étudier la déformation des pièces de bois qu'elle utilise pour ses charpentes lorsque celles-ci sont soumises à une charge constante. Le jour de l'installation la poutre ne subit aucune déformation.
On considère alors la fonction f, définie sur $[0;\infty[$, représentant la déformation en millimètres de la poutre en fonction du temps t exprimé en jours à partir de l'installation.

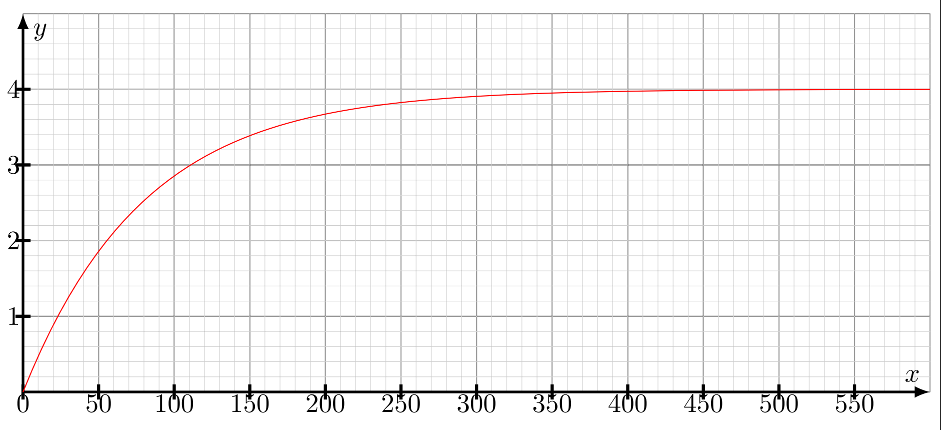
Partie A

1. Expliquer pourquoi $f(0) = 0$.
2. On sait que la fonction f est de la forme $f(t) = ke^{-0,0125t} + 4$. Déterminer le réel k.

Partie B

On admet que pour tout t positif, $f(t) = 4(1 - e^{-0,0125t})$. La courbe représentative de la fonction est donnée ci-dessous.

1. Avec la précision permise par le graphique, déterminer la déformation au bout de 150 jours.



2. (a) Avec la précision permise par la graphique, déterminer le nombre de jours nécessaire pour que la déformation atteigne 2 mm.
   (b) Retrouver ce résultat par le calcul.
3. (a) Déterminer graphiquement la déformation limite de la poutre à long terme.
   (b) Déterminer par le calcul le nombre de jours à partir duquel la déformation atteint 90% de sa valeur limite.

Problème 5:
Les pompiers utilisent dans le cadre de leurs interventions, une grande échelle téléscopique équipée d'une nacelle. On souhaite étudier la hauteur de la nacelle au cours du temps lors de l'élévation de celle-ci : on note $f(t)$ la hauteur en mètres de la nacelle en fonction du temps t en secondes. Cette fonction est définie sur $[0; +\infty[$ par :

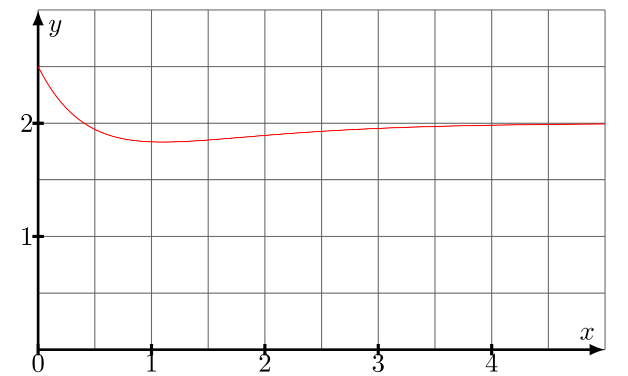
$$f(t) = 15 - 12e^{-0,2t}$$

1. Quelle est la hauteur de la nacelle à l'instant $t = 0$?
2. Calculer $\lim_{t \to +\infty} f(t)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Calculer $f'(t)$ puis établir le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction f à l'aide d'un outil numérique et vérifier les résultats précédents.
5. On considère que l'échelle est stabilisée lorsque la nacelle atteint une hauteur de $14,6$ m. Par calculs, déterminer le temps t_0 en secondes, pour que l'échelle soit stabilisée.

Problème 6:
Une étude est menée concernant le train d'atterrissage d'un certain type d'hélicoptère. Ce train d'atterrissage est composé d'une roue et d'un amortisseur oléopneumatique permettant d'absorber l'énergie de l'impact au moment de l'atterrissage.
On admet que la fonction f correspondant à la hauteur (en mètre) du centre de gravité de l'hélicoptère par rapport au sol à l'instant t (en seconde) est définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(t) = -e^{-t} + 1,5e^{-2t} + 2$$

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous.



1. Déterminer la hauteur du centre de gravité de l'hélicoptère au moment de l'atterrissage à l'instant $t = 0$.
2. Calculer $\lim_{t \to +\infty} f(t)$. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote dont on donnera une équation.
3. (a) A l'aide du graphique, conjecturer le sens de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
   (b) Exprimer $f'(t)$ en fonction de t puis montrer que $f'(t) = e^{-2t}(e^t - 3)$.
   (c) Résoudre sur $[0; +\infty[$ l'équation $e^t - 3 \geq 0$.
   (d) En déduire le signe de $f'(t)$ sur $[0; +\infty[$.
   (e) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$.