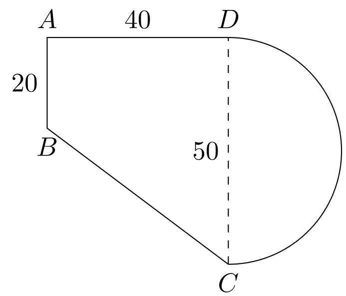
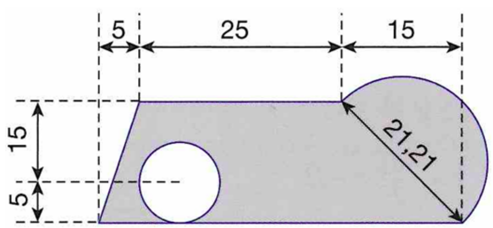
1 Calculs de périmètres, d'aires, de volumes

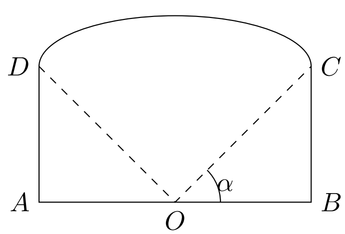
Exercice 1:
Déterminer l'aire de la surface suivante (l'unité est le mètre).



Exercice 2:
Déterminer la valeur exacte, puis la valeur approchée à 10^{-3} près, de l'aire de la surface grisée suivante (l'unité est le centimètre).

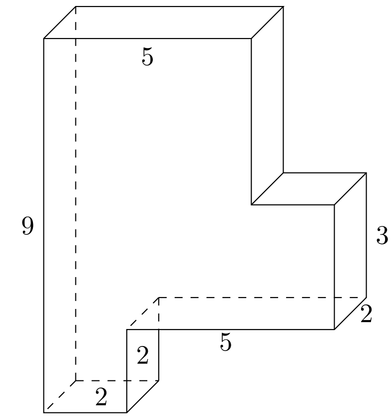


Exercice 3:
Sur cette figure, O est le milieu de $[AB]$. L'arc $\overset{\frown}{DC}$ est l'arc de cercle de centre O. $AB = 6$ cm et $AD = 3$ cm.

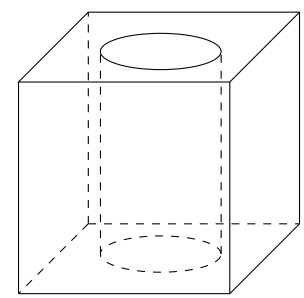


1. Calculer la longueur OC.
2. Calculer la valeur exacte de l'angle α.
3. En déduire l'aire du secteur circulaire OCD.
4. En déduire l'aire de la figure.

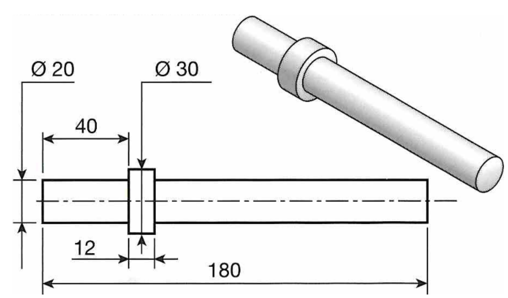
Exercice 4:
Les unités sont les centimètres. Déterminer le périmètre, la surface et le volume du solide suivant.



Exercice 5:
On considère un cube de côté 6 cm dont on a retiré un cylindre de rayon 20 mm. Déterminer le volume de la pièce.

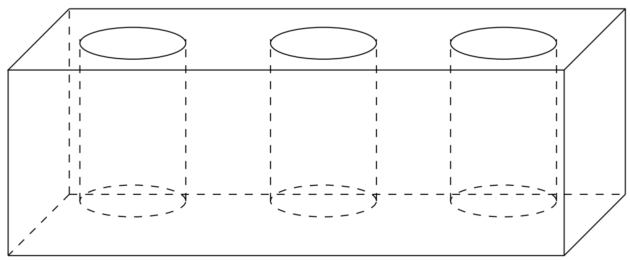


Exercice 6:
Les unités sont les centimètres. Soit l'arbre en acier suivant :



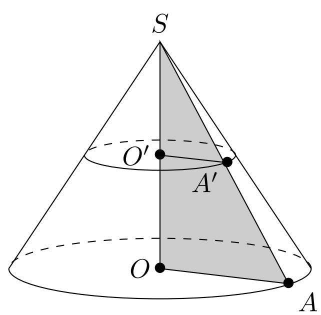
Calculer sa masse $M = \rho \times \mathcal{V}$ où $\rho = 7\ 800$ kg.m^{-3} est la masse volumique de l'acier et $\mathcal{V}$ le volume de l'arbre.

Exercice 7:
Les unités sont les centimètres. On souhaite construire un bloc en béton percé de trois cylindres. Chaque cylindre a un diamètre de 30 cm et une hauteur de 40 cm.
Un espace de 10 cm sépare les cylindres entre eux.
Un espace de 10 cm sépare les cylindres des parois du bloc.
Un espace de 10 cm sépare le fond des cylindres du fond du bloc.



1. Déterminer les dimensions extérieures du bloc.
2. Déterminer combien de litres de béton seront nécessaires pour la fabrication du bloc. Vous arrondirez vos résultats au centième.

Exercice 8:
On considère le cône de révolution de hauteur $[SO]$ et de rayon $[OA]$ ainsi que le cône de révolution de hauteur $[SO']$ et de rayon $[OA']$. Ce cône de révolution est une réduction du premier.



Le disque de centre O est parallèle au disque de centre O'. On a $OA = 10$ cm, $SO' = 3$ cm et $SO = 15$ cm.

1. Quel est le volume $\mathcal{V}$ du cône de révolution de hauteur $[SO]$ et de rayon $[OA]$?
2. Quel est le rapport k de réduction ?
3. En déduire le volume du cône de révolution de hauteur $[SO']$ et de rayon $[O'A']$. On rappelle que $\mathcal{V}' = k^3\mathcal{V}$.
4. En déduire le volume du cône tronqué.

2 Géométrie du triangle

2.1 Outils élémentaires

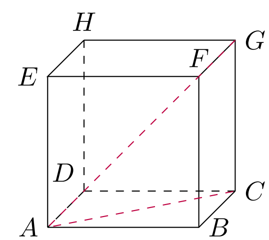
Exercice 9:
NIV est un triangle rectangle en V tel que $VI = 4$ cm et $VN = 5$ cm. Déterminer la longueur NI arrondie au mm.

Exercice 10:
$ABCD$ est un losange de centre O tel que $AC = 6$ cm et $BD = 8$ cm. Calculer le périmètre de ce losange.

Exercice 11:
ARC est un triangle rectangle en R tel que $AC = 52$ mm et $RC = 48$ mm. Déterminer la longueur AR.

Exercice 12:
A quelle hauteur se trouve le sommet d'une échelle de 5,50 mètres de long, en appui sur un mur perpendiculaire au sol et placée à 1,40 mètres du pied du mur ? Arrondir la valeur au cm.

Exercice 13:
On considère le cube ci-dessous de côté 4 unités.

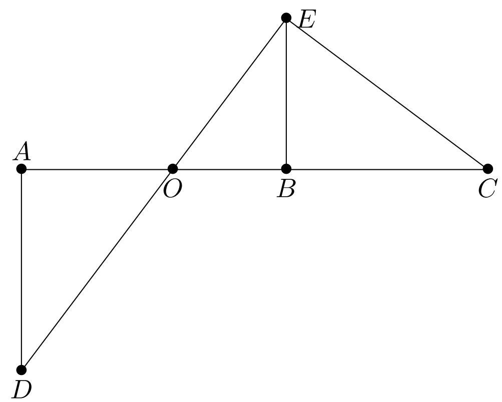


Déterminer les valeurs exactes et approchées à 10^{-2} près des longueurs AC et AG.

Exercice 14:
ABC est un triangle. Dans chacun des cas suivants, déterminer s'il est rectangle ou non, en précisant le théorème utilisé.

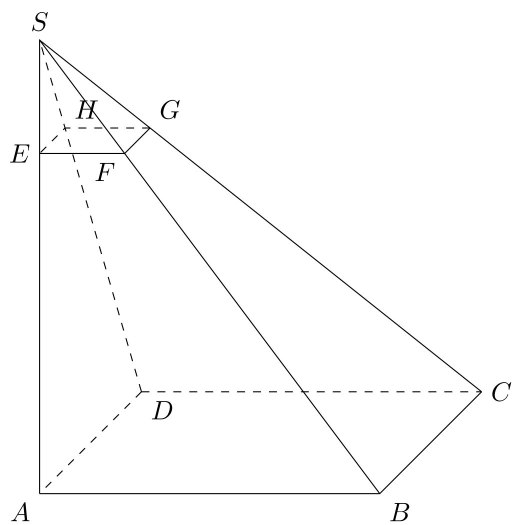
1. $AB = 5$ m, $AC = 4$ m et $BC = 3$ m
2. $AB = 7$ cm, $AC = 4$ cm et $BC = 8$ cm
3. $AB = 8$ m, $AC = 6$ m et $BC = 1$ dam
4. $AB = 5$ km, $AC = 40$ hm et $BC = 250$ dam

Exercice 15:
On suppose que $OA = 4$ cm, $OB = 3$ cm, $OE = 5$ cm et que les angles $\widehat{OAD}$, $\widehat{OBE}$ et $\widehat{OEC}$ sont droits.

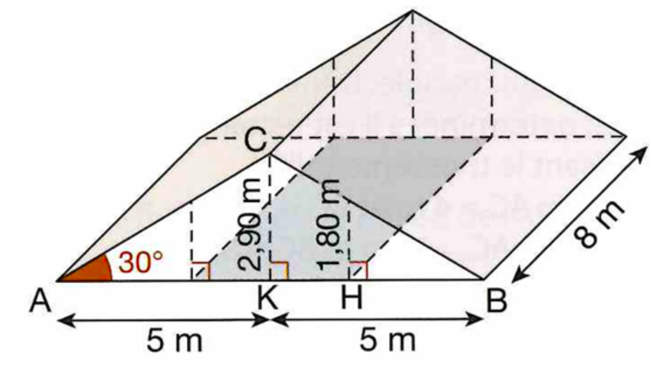


1. Déterminer la longueur OD.
2. Déterminer la longueur BE.
3. Déterminer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BOE}$ à 10^{-2} près.
4. Déterminer la longueur BC.

Exercice 16:
$SABCD$ est un pyramide à base carrée de hauteur $[SA]$ telle que $AB = 9$ m, $SA = 12$ m et $SE = 3$ m. De plus, $(AB)//(EF)$. Calculer la longueur EF.

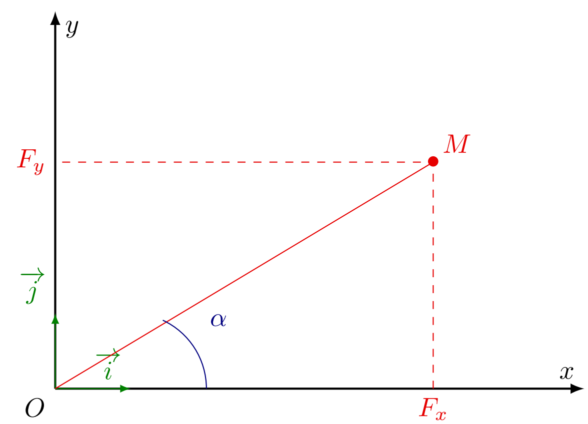


Exercice 17:
Une surface est dite habitable si la hauteur sous plafond est de plus de 1,80 mètres (article R111-2 du Code de construction), cela correspond à la partie grisée sur la figure ci-dessous. Déterminer la surface habitable de ces combles.



Exercice 18:
En physique, on modélise une force par un vecteur. Un représentant du vecteur force $\overrightarrow{F}$ est caractérisé par 4 éléments :

- la direction : orientation de la force ;
- le sens : vers où la force agit ;
- la norme $\|\overrightarrow{F}\|$: intensité de la force, mesurée en newtons (N) ;
- le point d'application : endroit où s'exerce la force.



A l'aide du schéma ci-dessus, calculer les composantes F_x et F_y d'une force d'intensité $22,6$ daN avec $\alpha = 34,2°$.

Exercice 19:
On considère le triangle ABC tel que $AC = 24$ cm, $BC = 28$ cm, $AB = 40$ cm et $\widehat{CAB} = 43°$.

1. Réaliser une figure à l'échelle $\dfrac{1}{4}$.
2. On appelle H le pied de la hauteur issue du point C. Placer H sur le dessins.
3. Déterminer la longueur AH à 10^{-2} près.
4. En déduire la longueur CH à 10^{-2} près.
5. Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ à 10^{-1} près.
6. En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ACB}$ à 10^{-1} près.
7. Calculer l'aire S du triangle ABC à 10^{-1} près.
8. Calculer l'aire S' du triangle tracé à la question 1.

2.2 Outils avancés

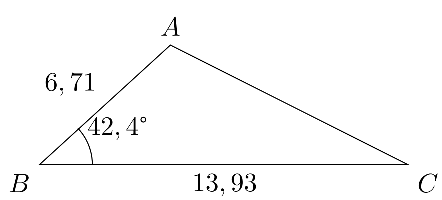
Exercice 20:
On considère le triangle DEF tel que $DE = 7$, $DF = 12$, $\widehat{FDE} = 31°$. Déterminer la valeur approchée à 10^{-2} près de EF.

Exercice 21:
On considère le triangle IJK tel que $IJ = 23$, $IK = 16$ et $\widehat{JIK} = 27°$. Déterminer la valeur approchée à 10^{-2} près de JK.

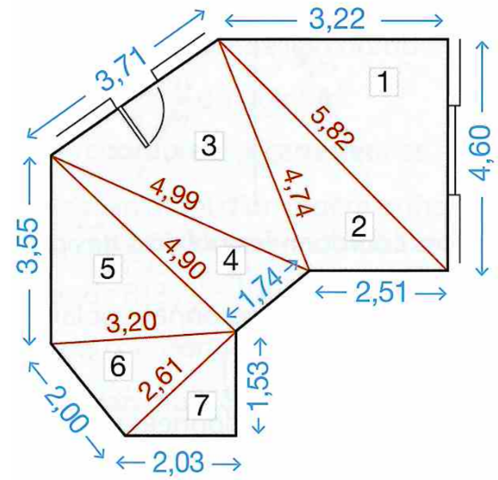
Exercice 22:
On considère le triangle MNO tel que $MN = 8$, $MO = 12$ et $NO = 6,4$. Déterminer la valeur approchée à 10^{-2} près de $\widehat{MNO}$.

Exercice 23:
Dans le triangle quelconque suivant, l'unité est le dm. Calculer :

1. la longueur manquante ;
2. les angles manquants ;
3. l'aire du triangle.



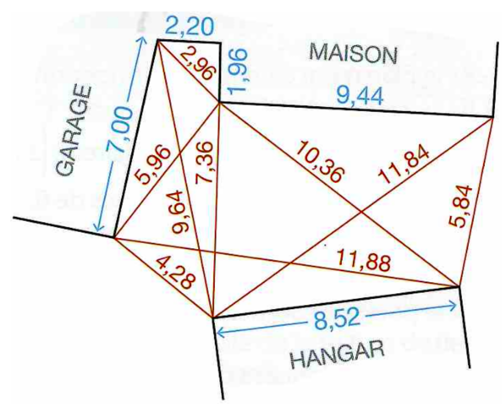
Exercice 24:
Voici ci-dessous le plan approximatif d'un séjour. Calculer la surface totale de ce séjour, au cm^2 près.



Exercice 25:
Un particulier désire remplacer les graviers en devanture de sa maison par du béton bitumineux, dit "enrobé". Calculer :

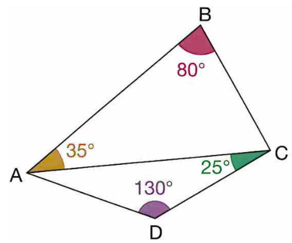
- La surface de l'enrobé ;
- le volume final de l'enrobé, sachant que l'épaisseur moyenne sera de 5 cm ;
- La masse finale de l'enrobé, sachant que sa masse volumique est d'environ $2,350$ tonnes.m^{-3}.

Les longueurs, les urfaces et les masses seront arrondues à 10^{-2} près, les volumes à 10^{-3} près.



Exercice 26:

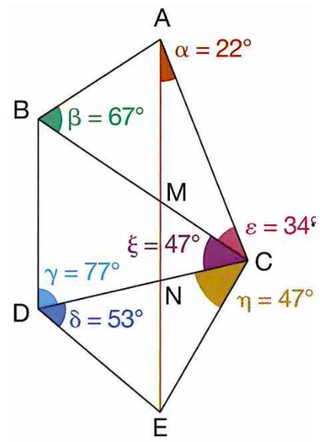
Dans la figure suivant, on donne $BC = 10$. A l'aide de la loi des sinus, calculer AC, $\widehat{CAD}$ puis CD. Arrondir les résultats au cm près.



Exercice 27:

Cet exercice illustre, dans un cadre simplifié, le calcule de la longueur du méridien de Paris, en utilisant 3 tirnalges (au lieu des 94 triangles du travail des scientifiques français Delambre et Méchain). Ce travail, commencé en 1792 et qui a duré 7 nas, a permis de calculer cette longueur avec une précision inédite et de définir la nouvelle unité internationale de mesure : le mètre (qui est égale à 1/40 000 00° de la circonférance de la Terre).

On souhaite calculer la longueur d'un morceau du méridien de Paris, caractérisé par le segment $[AE]$.



Pour cela, on a "enfermé" le segment correspondant dans une chaîne de 3 triangles et on a réalisé les mesures angulaires portées sur la figure.
On dispose d'une seule distance de base : $AC = 10$ km.
Uniquement à l'aide de la loi des sinus, déterminer les distances AM, MN, NE puis AE, arrondies à $0,1$ km près.

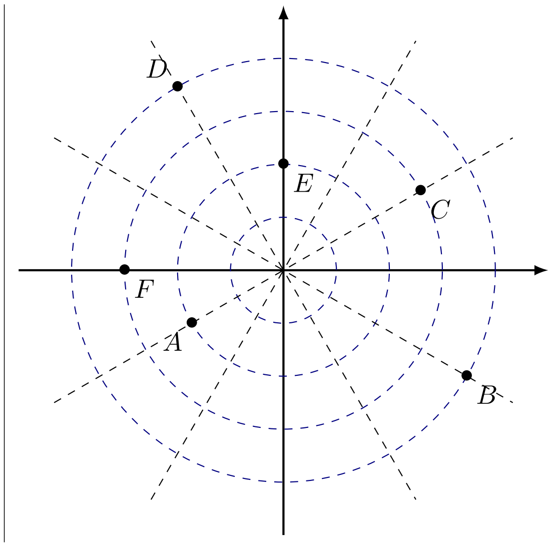
3 Repérage

3.1 Repérage d'un point dans le plan

Exercice 28:
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et d'unité 1 cm, placer le point de coordonnées cartésiennes $A(5;5)$ puis donner les coordonnées polaires de A.

Exercice 29:
On a muni le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et d'unité 1 cm. Puis on a partagé régulièrement celui-ci par des secteurs angulaires d'angle $\frac{\pi}{6}$.

1. Donner les coordonnées polaires des points A, B, C, D, E et F.
2. Placer les points de coordonnées polaires $G\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$, $H\left(3;\frac{5\pi}{6}\right)$ et $I\left(4;\frac{7\pi}{6}\right)$
3. Placer les points de coordonnées polaires $J\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$, $K\left(3;\frac{2\pi}{3}\right)$ et $L\left(4;-\frac{2\pi}{3}\right)$



Exercice 30:
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et d'unité 1 cm, placer le point de coordonnées polaires $A\left(2;\frac{\pi}{4}\right)$ puis donner les coordonnées cartésiennes de A.

Exercice 31:
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et d'unité 1 cm, placer le point de coordonnées polaires $B\left(3;-\frac{\pi}{3}\right)$ puis donner les coordonnées cartésiennes de B.

Exercice 32:
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et d'unité 1 cm, placer les points de coordonnées polaires $C(4;0)$ et $D(4;\pi)$ puis donner les coordonnées cartésiennes de C et D.

3.2 Repérage d'un point dans l'espace

Exercice 33:
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les coordonnées cylindriques $\left(5;\frac{\pi}{4};2\right)$ du point A. Donner ses coordonnées cartésiennes.

Exercice 34:
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on donne les coordonnées cylindriques de $B\left(5; \dfrac{2\pi}{3}; 2\right)$ et $C\left(5; \dfrac{2\pi}{3}; -2\right)$. Donner leurs coordonnées cartésiennes respectives.

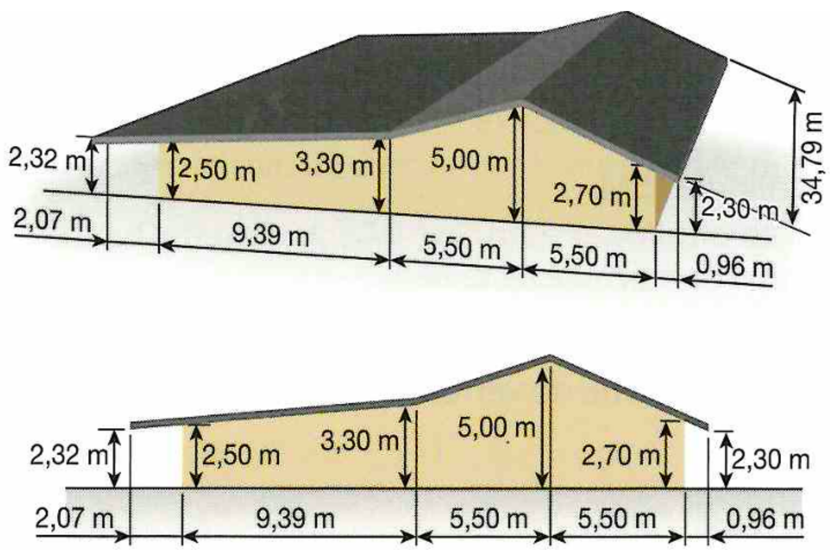
Exercice 35:
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on donne les coordonnées sphériques $\left(2; \dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{4}\right)$ du point A. Donner ses coordonnées cartésiennes.

Exercice 36:
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on donne les coordonnées cylindriques de $B\left(3; \dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right)$ et $C\left(5; \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right)$. Donner leurs coordonnées cartésiennes respectives.

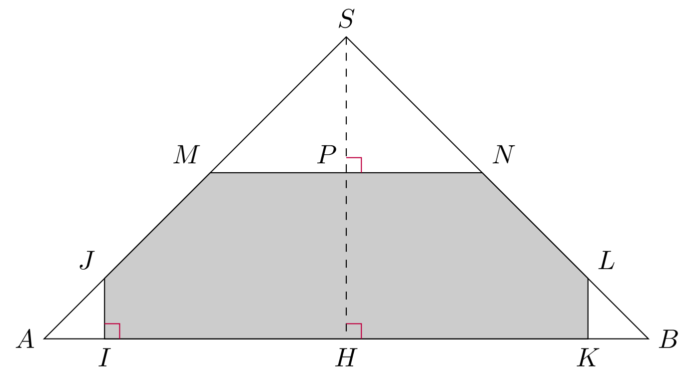
Exercice 37:
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on donne les coordonnées cartésiennes de $A(-1; 0; -1)$ et $B(0; 5; 0)$. Donner leurs coordonnées sphériques respectives.

4 Problèmes

Problème 1:
Voici les schémas de construction d'une cantine soclaire, calculer la surface totale de la toiture de cette construction à 10^{-2} m^2 près.



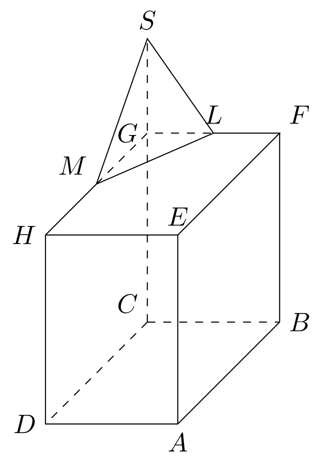
Problème 2:
On s'intéresse à la création d'un espace habitable dans le grenier d'une maison. Cet espace sera délimité par un plafond, 2 rampants de toiture et 2 murs latéraux.
Le plancher du grenier a la forme d'un rectangle de 12 m sur 8 m. L'angle formé par le plancher et le toit est égal à 45°. L'intérieur du grenier peut être modélisé par un prisme droite dont la base est un triangle SAB isocèle en S tel que $AB = 8$ m et $\widehat{SAB} = 45°$. On note H le milieu de $[AB]$.
Les extrémités des 2 murs latéraux sont modélisés par les segments $[IJ]$ et $[KL]$ tels que $IJ = KL = 80$ cm.



1. (a) Déterminer la longueur SH exprimée en m.
   (b) En déduire l'aire du triangle SAB en m^2.
2. Déterminer l'aire du triangle AIJ en m^2.
3. On sougaite que le plafond de l'espace habitable soit à 2,20 m du plancher, c'est-à-dire $PH = 2,20$ où P est le milieu de $[MN]$.
   (a) Déterminer la longueur MN en m.
   (b) Etablir que l'aire du polygone $IJMNLK$ est égale à $12,12$ m^2.
4. On rappelle que le plancher du grenier a la forme d'un rectangle de 12 m sur 8 m. Un radiateur choisi par le propriétaire permet de chauffer un volume de 50 m^3. Déterminer le nombre de radiateurs que doit prévoir le propriétaire pour chauffer l'espace habitable créé.
5. Le propriétaire souhaite peindre tous les murs verticaux, les rampants et le plafond de l'espace habitable. Déterminer l'aire de la surface à peindre exprimée en m^2 et en donner la valeur arrondie à l'unité.

Problème 3:

Un hôtelier souhaite installer une terrasse sur le toit de son hôtel et, pour protéger et orner l'accès à celle-ci, faire construire une pyramide de verre sur une partie du toit. Une représentation du bâtiment en perspective parallèle est fournie ci-contre. Cet hôtel est formé d'un pavé droite $ABCDEFGH$ avec $AB = 14$ m, $AD = 7$ m et $AE = 10$ m. On souhaite installer sur le toit une pyramide dont la base est le triangle GLM et la hauteur est GS, où les points L et M sont les milieux respectifs de $[FG]$ et $[GH]$ et $GS = \frac{1}{2}CG$.



Partie A

Afin que la pyramide satisfasse à certaines normes esthétiques, la mesure de l'angle $\widehat{LSM}$ doit dépasse 60°. On considère les points I, J et K, respectivement situés sur $[CD]$, $[CS]$ et $[CG]$ tels que $CI = CJ = CK = 1$ m.
On munit ainsi l'espace d'un repère orthonormal $(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{CK})$.

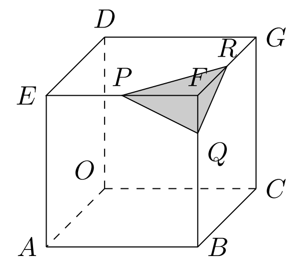
1. (a) Par lecture graphique, donner les coordonnées des points F, G et H dans ce repère.
   (b) Démontrer que les coordonnées de L sont $(0; 3,5; 10)$. Donner de même les coordonnées de M.
2. On admet que $S(0; 0; 15)$.
   (a) Calculer les valeurs exactes des distances SL, LM et SM.
   (b) A l'aide du théorème d'Al-Kashi, en déduire la valeur approchée, arrondie au degré, de la mesure de l'angle $\widehat{LSM}$. La contrainte esthétique est-elle vérifiée ?

Partie B

1. Le constructeur de la pyramide en verre doit déterminer la surface de verre nécessaire à la réalisation de cet ouvrage.
   (a) Donner, sans justification, la nature des triangles GMS et GLS.
   (b) Calculer les aires des triangles GMS et GLS.
   (c) On admet que $\mathcal{A}_{SLM} = 23,01$ m^2, quelle est la surface de verre nécessaire à la réalisation de cette pyramide de verre ?
2. Calculer le volume, arrondi au m^3, de l'hôtel muni de la pyramide de verre.

Problème 4:

Le boîte de nuit "Le cube" a besoin d'entreprendre des travaux de rénovation de ses locaux. Le bâtiment est constitué d'un cube tronqué, représenté ci-dessous.



Description de l'objet:

- l'arête du cube mesure 24 m.
- P est le milieu de $[EF]$.
- R est le milieu de $[FG]$.
- Q est le point de $[BF]$ vérifiant $FQ = \frac{1}{4}FB$.

1. Démontrer que $PR = 12\sqrt{2}$ et que $PQ = QR = 6\sqrt{5}$ (l'unité de longueur est le mètre).
2. A l'aide du théorème d'Al-Kashi, déterminer la valeur de l'angle $\widehat{QPR}$, arrondie au dixième de degré.
3. Déterminer la valeur de l'aire de la verrière, arrondie au dixième de m^2. On admet que :

$$\mathcal{A}_{PQR} = \sqrt{\frac{\mathcal{P}_{PQR}}{2} \times \left(\frac{\mathcal{P}_{PQR}}{2} - PQ\right) \times \left(\frac{\mathcal{P}_{PQR}}{2} - PR\right) \times \left(\frac{\mathcal{P}_{PQR}}{2} - QR\right)}$$

4. (a) Donner, sans justifier, la nature des triangles FPR, FPQ et FQR.
   (b) Déterminer la valeur exacte, en m^2, des aires de ces trois triangles.
   (c) En déduire la surface extérieure totale du bâtiment.
5. (a) Déterminer, à 10^{-2} m^3 près, le volume de la pyramide $FPQR$.
   (b) En déduire la valeur, à 10^{-2} m^3 près, du volume de la boîte de nuit "Le cube".