

1 Primitives

Exercice 1:

Démontrer que $F(x) = 7x^2 - 3x + 5$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = 14x - 3$. Donner une autre primitive de f .

Exercice 2:

Démontrer que $G(x) = x \ln(x) - x$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $g(x) = \ln(x)$. Donner une autre primitive de g .

Exercice 3:

Démontrer que $H(t) = (-2t - 3)e^{-t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $h(t) = (2t + 1)e^{-t}$. Donner une autre primitive de h .

Exercice 4:

La fonction F est-elle une primitive de f ?

1. $f : x \mapsto 7$ et $F : x \mapsto 7x + 4$
2. $f : x \mapsto -2x$ et $F : x \mapsto -2x^2$
3. $f : x \mapsto 3x^2 + 1$ et $F : x \mapsto x^3 + 1$
4. $f : x \mapsto x^3 - 2x$ et $F : x \mapsto \frac{x^4}{4} - x^2 - 3$
5. $f : x \mapsto x^2 - \frac{1}{x^2}$ et $F : x \mapsto \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}$
6. $f : x \mapsto -\frac{x}{1+x^2}$ et $F : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
7. $f : x \mapsto \frac{3}{(x+2)^2}$ et $F : x \mapsto \frac{x-1}{x+2}$
8. $f : x \mapsto \frac{5t^4}{1+t^5}$ et $F : x \mapsto \frac{1}{1+x^5}$

Exercice 5:

Montrer que F est une primitive de f .

1. $f : x \mapsto 4$ et $F : x \mapsto 4x - 7$
2. $f : x \mapsto 2x + 3$ et $F : x \mapsto x^2 + 3x$
3. $f : x \mapsto -3x + 2$ et $F : x \mapsto -\frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$
4. $f : x \mapsto 9x^2$ et $F : x \mapsto 3x^3$

$$5. f : x \mapsto x^2 \text{ et } F : x \mapsto \frac{x^3}{3} + 2$$

$$6. f : x \mapsto 8x^3 - 6x^2 \text{ et } F : x \mapsto 2x^4 - 2x^3$$

$$7. f : x \mapsto -\frac{3}{x^2} \text{ et } F : x \mapsto \frac{3}{x} - 7$$

$$8. f : x \mapsto \sin(x) \text{ et } F : x \mapsto -\cos(x) + 1$$

Exercice 6:

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto -3$	3. $x \mapsto \frac{x^2}{3} - x$
2. $x \mapsto 2x - \frac{1}{3}$	4. $x \mapsto 3x^2 + \frac{2x}{3} - 7$

Exercice 7:

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f : t \mapsto -5 \cos(t)$	3. $h : t \mapsto -8 \sin(2t)$
2. $g : x \mapsto 2x^3 - 5x + 3$	4. $i : t \mapsto \frac{5}{t^2}$

Exercice 8:

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f : t \mapsto \frac{t^6}{5}$	3. $h : t \mapsto \sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$
2. $g : x \mapsto \cos(2x)$	4. $i : t \mapsto \frac{t^3 + 2t^2 - 1}{t^2}$

Exercice 9:

Déterminer une primitive des fonctions suivantes qui prend la valeur y_0 en x_0 :

1. $f : t \mapsto 6t^5$; $x_0 = 1$ et $y_0 = 4$
2. $g : x \mapsto 0.5x^4 + 3x^3 + 5x$; $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$
3. $h : t \mapsto 4t - \frac{2}{t^2}$; $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$
4. $i : t \mapsto t + \frac{5}{t^2} + 3 \cos(t + 3\pi) - 3 \sin(5t)$; $x_0 = \pi$ et $y_0 = 2$

Exercice 10:

Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive F de la fonction $f : x \mapsto 3x^2 - 2x$ vérifiant $F(1) = 2$.

Exercice 11:

Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive F de $f : x \mapsto \sin(2t)$ vérifiant $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Exercice 12:

Déterminer sur $\mathbb{R}_+^*$ la primitive F de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2} - 1$ vérifiant $F(1) = -1$.

Exercice 13:

Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive F de $f : x \mapsto e^x$ vérifiant $F(0) = e$.

Exercice 14:

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

- | | |
|---|--|
| 1. $x \mapsto \frac{1}{(x+2)^2}$ sur $] -\infty; 2[$ | 3. $x \mapsto \frac{x}{(x^2+2)^3}$ sur $\mathbb{R}$ |
| 2. $x \mapsto \frac{2}{(x+3)^2}$ sur $] -3; +\infty[$ | 4. $x \mapsto \frac{3x^2}{(x^3-1)^4}$ sur $]1; +\infty[$ |

Exercice 15:

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1. $x \mapsto e^x - 2e^{-x}$ | 3. $x \mapsto \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$ |
| 2. $x \mapsto \frac{2x}{(x^2+3)^2}$ | 4. $x \mapsto \frac{9x^2-3}{(x^3-x)^2}$ sur $]1; +\infty[$ |

2 Intégrales

2.1 Calcul d'intégrales

Exercice 16:

Soit $f : x \mapsto (x^2 - 1)e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

- Démontrer que $F(x) = (-x^2 - 2x - 1)e^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- En déduire la valeur de $I = \int_1^3 f(x)dx$.

Exercice 17:

Soit la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2 + \ln(1+x)}{1+x}$$

On considère la fonction F définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$F(x) = 2\ln(1+x) + \frac{1}{2}\ln^2(1+x)$$

- Calculer $F'(x)$. Que constat-t-on ?
- On note $I = \int_0^2 f(x)dx$. Démontrer que $I = \frac{1}{2}\ln^2(3) + 2\ln(3)$.
 - Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de I .
 - Donner une interprétation graphique du résultat obtenu à la question précédente.

Exercice 18:

Calculer les intégrales suivantes :

- | | |
|--|---|
| 1. $\int_{-5}^7 \sqrt{2}dx$ | 7. $\int_0^1 e^{2x}dx$ |
| 2. $\int_3^{14} \frac{1}{x}dx$ | 8. $\int_1^9 \frac{3}{2\sqrt{x}}dx$ |
| 3. $\int_{-2}^4 (x^2 + 3x + 4)dx$ | 9. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2x) - 3\sin(5x))dx$ |
| 4. $\int_0^{10} e^{-5x}dx$ | 10. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ |
| 5. $\int_{-1}^1 (x^4 - x^2 + x - 1)dx$ | 11. $\int_3^7 \frac{dx}{x^2}$ |
| 6. $\int_{-2}^2 (8x^5 + 5x^3 + 2x)dx$ | 12. $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2}dx$ |

Exercice 19:

Calculer les intégrales suivantes :

- | | | |
|--------------------------------------|--|---|
| 1. $\int_{-3}^3 (x^5 + 2x^3 - 2x)dx$ | 3. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2)dx$ | 5. $\int_0^4 \frac{2x}{1+x^2}dx$ |
| 2. $\int_{-2}^4 2xe^{x^2}dx$ | 4. $\int_{-3}^3 \cos(x)dx$ | 6. $\int_{-1}^4 \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}dx$ |

Exercice 20:

Pour tout réel $x > -1$, on pose $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$.

1. Montrer que pour tout $x > -1$, $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$.

2. En déduire une primitive de f sur $] -1; +\infty[$.

3. Calculer alors $\int_1^3 f(x)dx$.

Exercice 21:

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $\begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < -1 \\ 2x^3 - x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$.

Calculer $\int_{-4}^1 f(t)dt$.

Exercice 22:

Soit $I = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$.

1. Expliquer pourquoi $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ ne correspond à aucune forme de dérivée connue.

2. Déterminer deux réels α, β tels que pour tout $x \neq -1$, $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x+1}$.

3. En déduire que $I = 1 - \ln(2)$.

Exercice 23:

En remarquant que pour tout réel t , $t^3 = t^3 + t - t$, calculer $\int_0^1 \frac{t^3}{t^2+1} dt$.

Exercice 24:

Calculer l'intégrale $\int_1^2 \frac{3u^2 + 2u - 1}{u} du$.

Exercice 25:

Calculer $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx + \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$.

Exercice 26:

Soient f, g deux fonctions continues sur $[1; 2]$ telles que :

$$\int_1^2 f(x)dx = 2 \quad \text{et} \quad \int_1^2 g(x)dx = -3$$

1. Calculer $\int_1^2 (5f(x) - g(x))dx$ 2. Calculer $\int_1^2 \left(\frac{1}{2}f(x) + \frac{2}{3}g(x) \right) dx$

Exercice 27:

A l'aide d'une intégration par partie, calculer : $\int_0^\pi x \cos(x)dx$ et $\int_1^4 x \ln(x)dx$.

Exercice 28:

Calculer les intégrales suivantes

$$1. \int_1^2 4xe^{3x-1} dx \quad \Bigg| \quad 2. \int_0^1 xe^{4+5x} dx \quad \Bigg| \quad 3. \int_{-1}^1 (x+3)e^{-x} dx$$

Exercice 29:

Calculer les intégrales suivantes

$$1. \int_{-1}^1 2x^3 e^{x^2-1} dx \quad \Bigg| \quad 2. \int_0^1 \frac{x}{(5x+3)^2} dx \quad \Bigg| \quad 3. \int_{-1}^0 \frac{5x}{(3x-9)^3} dx$$

Exercice 30:

Calculer les intégrales suivantes

$$1. \int_{-1}^3 3x^2 e^{x^2} dx \quad \Bigg| \quad 2. \int_0^2 4(2x+1)^3 e^{x^2+x-1} dx$$

Exercice 31:

A l'aide de deux intégrations par parties, calculer $\int_0^1 x^2 e^x dx$.

Exercice 32:

Pour tout entier naturel n , on définit l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

1. Calculer la valeur exacte de I_0 .
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier n on a : $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$
3. En déduire les valeurs de I_1 et I_2 .

Exercice 33:

On pose $I = \int_0^\pi e^x \cos(x) dx$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = \int_0^\pi e^x \sin(x) dx$.
2. A l'aide d'une nouvelle intégration par parties, montrer que $I = e^\pi - 1 - I$.
3. En déduire la valeur de I .

Exercice 34:

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x-1)e^x + 3$$

1. On note $I = \int_0^{0,5} 2 + x + \frac{3}{2}x^2 dx$. Démontrer que $I = 1,1875$.
2. On note $K = \int_0^{0,5} (2x-1)e^x dx$. Démontrer, à l'aide d'une intégration par partie que $K = 3 - 2e^{0,5}$.
3. On note $J = \int_0^{0,5} f(x) dx$. A l'aide de la question précédente, déterminer la valeur exacte de J .
4. Vérifier que $J - I$ est inférieur à 2×10^{-2} .

Exercice 35:

Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variable :

1. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$ en posant $t = e^x$.
2. $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$ en posant $t = \sqrt{1+x}$.
3. $\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$ en posant $t = \sqrt{e^x + 1}$.

2.2 Valeurs moyennes**Exercice 36:**

1. Calculer la valeur moyenne de $f : x \mapsto \frac{6}{x}$ sur $[3; 7]$.
2. Calculer la valeur moyenne de la fonction exponentielle sur $[0; 2]$.

Exercice 37:

On considère une intensité électrique dont l'expression, en ampère, est donnée en fonction du temps t , en seconde, par :

$$i(t) = I_{max} \sin(\omega t) \quad \text{avec } \omega > 0$$

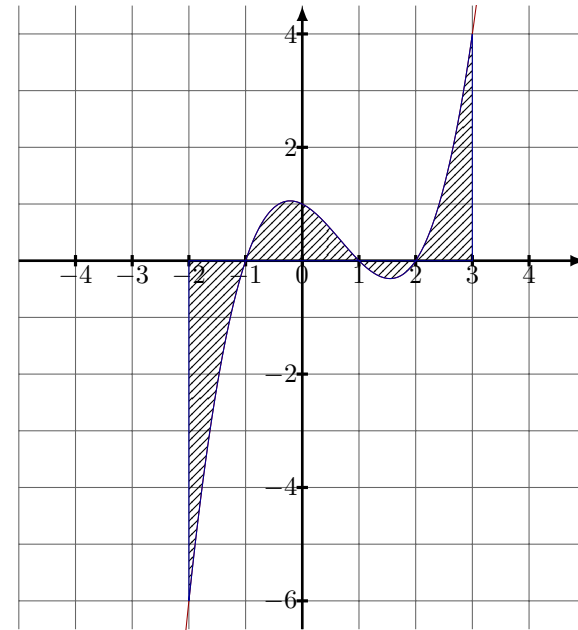
1. Prouver que la fonction $t \mapsto \frac{I_{max}^2}{2} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \cos(\omega t) \right)$ est une primitive de $t \mapsto i^2(t)$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^T i^2(t) dt$ où $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
3. En utilisant le résultat précédent, montrer que la valeur moyenne de $t \mapsto i^2(t)$ sur $[0; T]$ est $\frac{I_{max}^2}{2}$. C'est l'intensité efficace du courant i .

2.3 Calcul d'aires**Exercice 38:**

Soit f la fonction définie pour tout $x \in [-2; 3]$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - x^2 - \frac{x}{2} + 1$$

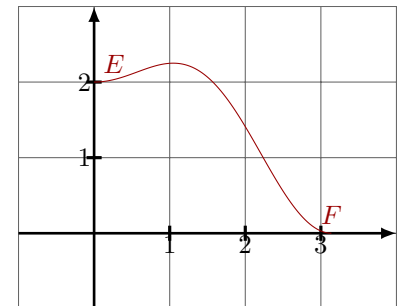
Déterminer l'aire de la surface colorée suivante, délimitée par la courbe de f .

**Exercice 39:**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm. La courbe ci-après donne l'allure de la représentation graphique de la fonction f définie pour tout $x \in [0; \pi]$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) + \cos(x) + \frac{3}{2}$$

Les points E et F ont pour coordonnées $E(0; 2)$ et $F(\pi; 0)$.



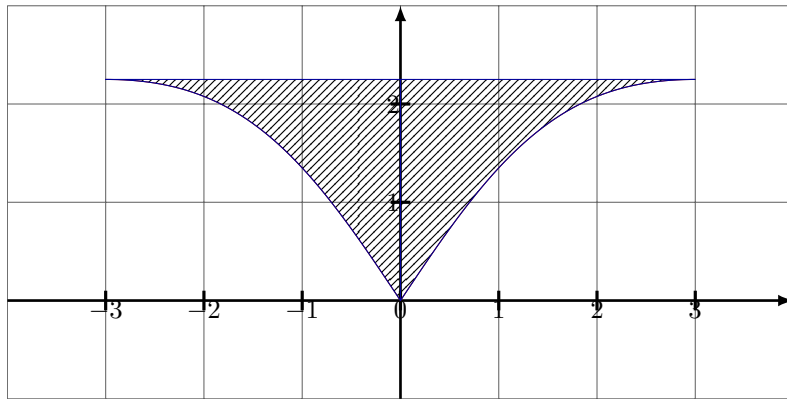
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par la portion de courbe entre E et F , l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Exercice 40:

La plan est muni d'un repère orthonormé d'unité graphique le cm. On désire calculer de façon précise l'aire $\mathcal{A}$ de la surface hachurée sur ma figure ci-dessous. Pour cela, on dispose des données suivantes :

- la pièce est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
- le bord supérieur correspond à la droite $y = 2,25$;
- le bord inférieur droite correspond à la fonction g définie pour tout $x \in [0; 3]$ par :

$$g(x) = \frac{27x}{2x^2 + 18}$$



- Déterminer l'aire $\mathcal{A}_1$ du rectangle $OPQR$.
- Démontrer que $G(x) = \frac{27}{4} \ln(x^2 + 9)$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
 - En déduire l'aire $\mathcal{A}_2$ de la partie du plan délimité par la courbe de g , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.
- Déduire des questions précédentes l'aire $\mathcal{A}$, arrondie au millièrme.

Exercice 41:

Le plan est muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

- Tracer les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ qui représentent respectivement les fonctions f et g définies sur $[1; 2]$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.
- On note $\mathcal{D}$ le domaine ensemble de points $M(x; y)$ du plan tels que :

$$1 \leq x \leq 2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} \leq y \leq x^2$$

- Calculer, en unité d'aire, l'aire de $\mathcal{D}$.
- Exprimer cette aire en cm^2 .

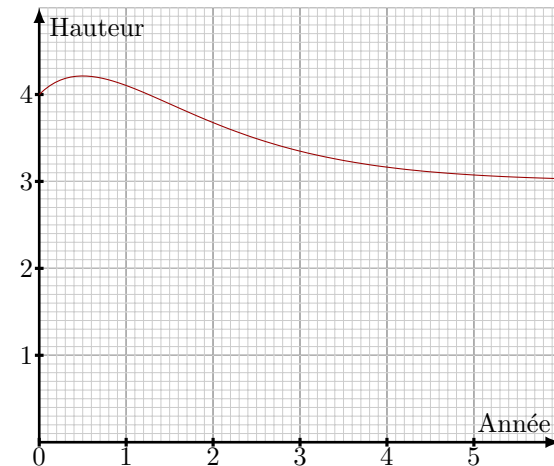
3 Problèmes**Problème 1:**

On s'intéresse à un jouet pour enfant monté sur un ressort. Le principe de fonctionnement est le suivant : on comprime le jouet au sol et une fois relâché, celui-ci est propulsé dans les airs à une certaine hauteur puis retombe au sol. On suppose que le mouvement du jouet est vertical. On souhaite étudier la hauteur atteinte par le jouet en fonction du nombre d'années d'utilisation.

La hauteur, exprimée en décimètres, que peut atteindre le jouet après x années d'utilisation est donnée par la fonction f définie pour tout $x \in [0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (2x + 1)e^{-x} + 3$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$.



- Quelle hauteur en décimètre peut atteindre le jouet lors de la toute première utilisation, c'est-à-dire pour $x = 0$?
- Quelle hauteur en décimètres peut atteindre le jouet après 6 mois d'utilisation ? Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} .
- On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ et que $f(x) = 2xe^{-x} + e^{-x} + 3$.
 - Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
 - En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote $\mathcal{D}$, dont on donnera une équation, puis tracer cette droite $\mathcal{D}$ sur le graphique.
 - Interpréter cette limite dans le contexte de la situation étudiée.

4. On note f' la fonction dérivée de f .

- Justifier que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f'(x) = (1 - 2x)e^{-x}$.
- Etudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in [0; +\infty[$. En déduire le tableau de variation de f .

5. On admet que $f : x \mapsto (-2x - 3)e^{-x} + 3x$ est une primitive de la fonction f . Calculer l'aire $\mathcal{A}$, en cm^2 , de la partie du plan limitée de la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^2 .

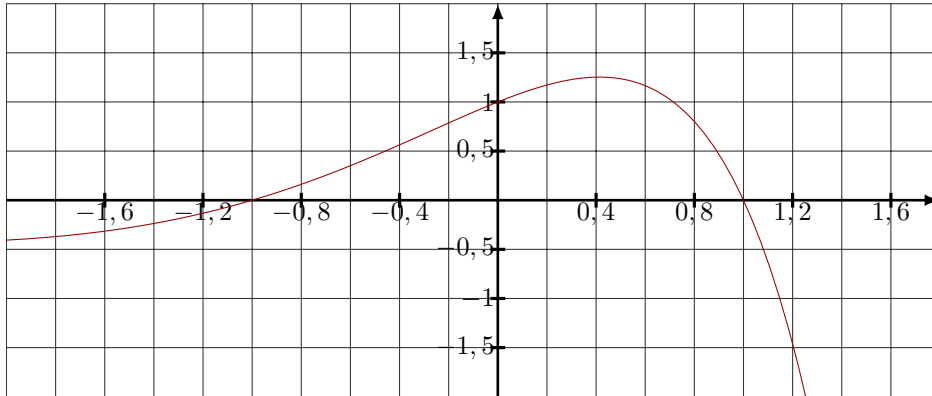
Problème 2:

On se place dans un repère orthonormé d'unité le cm. Soit f une fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x(1 - x^2)$$

L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.

- A quelle(s) condition(s) l'objectif correspond-il au calcul de $I = \int_{-1}^1 f(x)dx$?
- La courbe représentative de f est tracée ci-dessous. Hachurer l'intégral I sur le graphique.



- Calculer la dérivée de la fonction f , vérifier votre réponse grâce à un logiciel de calcul formel.
- Etablir le tableau de variation de f sur $[-1; 1]$, en déduire le signe de f sur cet intervalle.
- A l'aide d'un logiciel de calcul formel, donner la valeur exacte de cette intégrale. Prouver ce résultat par le calcul.

Problème 3:

On considère que la croissance de tournesols en fonction du temps est modélisée par la fonction f définie pour tout $x \in [0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{1 + 20e^{-0,05x}}$$

où $f(x)$ est la hauteur du plant en mètres et x le temps en jours.

- Calculer la hauteur d'un tournesol au bout de 30 jours.
- Calculer la fonction dérivée de f . En déduire le tableau de variation de la fonction f .
- Calculer la limite de f en $+\infty$.
- Que peut-on déduire des questions 2 et 3 pour le tournesol ?
- Déterminer le nombre de jours nécessaires pour que le tournesol atteigne supérieure à 1,5 m.
- A l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$. Redémontrer ce résultat par le calcul.
- Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50; 100]$. On donnera un résultat approché à 0,01 près. Interpréter le résultat obtenu.