

Chapitre 1 : Géométrie repérée

Table des matières

Chapitre 1 : Géométrie repérée	1
CARPENTIER Axel	
Contenu	2
1 Rappels sur les vecteurs	3
2 Equations géométriques	7
2.1 Equations de cercles	7
2.2 Equations de droites	7
3 Exercice bilan	8

Contenu

- Vecteur normal à une droite. Le vecteur de coordonnées (a, b) est normal à la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Le vecteur $(-b, a)$ en est un vecteur directeur.
- Équation de cercle.
- Parabole représentative d'une fonction polynôme du second degré. Axe de symétrie, sommet.

1 Rappels sur les vecteurs

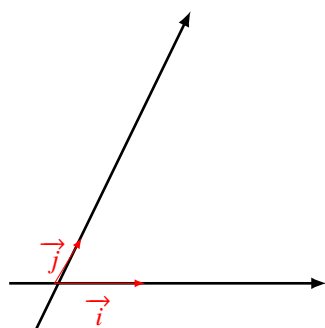
Définition:

On appelle repère du plan la donnée de 3 points non alignés (O, I, J) où O est l'origine du repère, (OI) représente l'axe des abscisses et (OJ) l'axe des ordonnées.

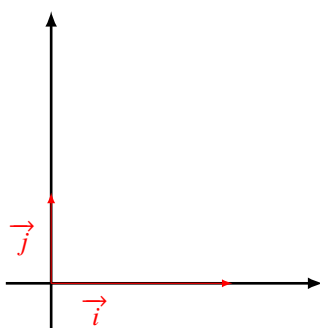
On définira surtout le repère par $(O, I, J) = (O, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$

! Remarque

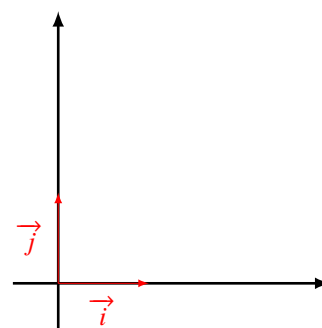
- Un repère est dit orthogonal si les directions de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires.
- Un repère est orthonormé si EN PLUS on a $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$



Repère quelconque



Repère orthogonal



Repère orthonormé

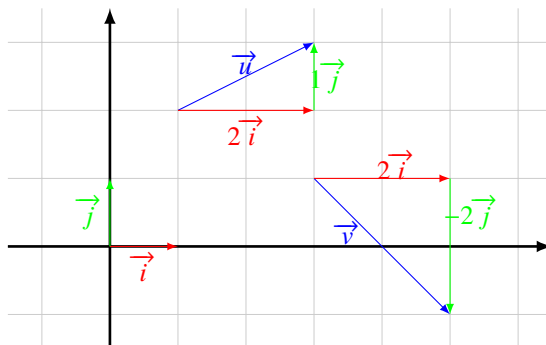
Définition:

On se place dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Un point M a pour coordonnées $(x; y)$ dans ce repère signifie que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. On dira alors que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- Un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans ce repère signifie que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. On écrira alors $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

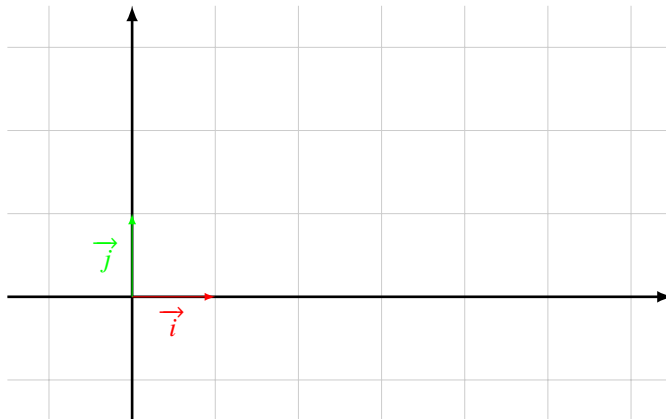
Exemple:

Dans le repère ci-dessous on a $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$



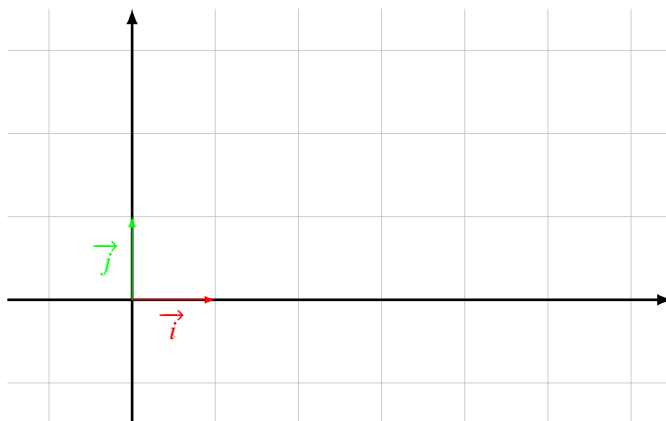
Exercice:

Soit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, représenter les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.



Exercice:

Soit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, représenter les points $A(4,1)$; $B(-1,2)$ et déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Propriété:

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On a les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ = point d'arrivée - point de départ

Démonstration: (*Hors programme*)

Par définition, $\overrightarrow{AB}$ est l'unique vecteur tel que $B = A + \overrightarrow{AB}$, d'où le résultat.

Exercice:

Soit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, représenter les points $A(4,1)$; $B(-1,2)$ et déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Propriété:

Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et k un réel quelconque. On a :

- $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.
- Les coordonnées du vecteur somme sont $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.
- Les coordonnées du vecteur multiplié sont $k\vec{u} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Démonstration: (Hors programme)

Ceci vient du fait que $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel.

Exercice:

Soient les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $7\vec{v}$.

Propriété:

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a :

La norme du vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est donnée par $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Démonstration: (Hors programme)

On a :

- $\|\vec{u}\| = 0 \iff \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \iff x = y = 0$
- $\|\vec{u}\| \geq 0$
- $\|\lambda\vec{u}\| = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = |\lambda| \sqrt{x^2 + y^2} = |\lambda| \|\vec{u}\|$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{(x + x')^2 + (y + y')^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2(xx' + yy') + x'^2 + y'^2} \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Exercice:

Soient deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. Déterminer la distance AB .

Définition/Propriété:

- On appelle déterminant de deux vecteurs $\vec{u}(x, y), \vec{v}(x', y')$ la donnée $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$
- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Démonstration:

- Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. On a alors que il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.
D'où $x' = \lambda x$ et $y' = \lambda y$.
Doù $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y = \lambda xy - \lambda xy = 0$. D'où le résultat.
- Supposons que le déterminant est nul.
Si les deux vecteurs sont nuls alors le résultat est immédiat, supposons donc qu'ils ne le sont pas et considérons donc que $x \neq 0$. On a que $xy' - x'y = 0$ d'où $y' = \frac{y}{x}x'$.
D'où : $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ \frac{y}{x}x' \end{pmatrix} = \frac{x'}{x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \vec{u}$.
D'où le résultat.

Exercice:

Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

- $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{z} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}$

Méthode:

- Pour déterminer si 3 points A,B,C sont alignés.
 - Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
 - Calculer leur déterminant et regarder s'il est nul.
- Pour déterminer si 2 droites (AB), (CD) sont parallèles.
 - Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$.
 - Calculer leur déterminant et regarder s'il est nul.

Exercice:

- Les 3 points $A(1; 2)$, $B(-1; 6)$, $C(2; 0)$ sont-ils alignés ?
- Sur l'écran d'un contrôle aérien, on repère un avion A au point de coordonnées $A_1(25, 18)$ et un avion B au point de coordonnées $B_1(183, 57)$. Quelques minutes plus tard, on repère l'avion A au point de coordonnées $A_2(38, 47)$ et l'avion B au point de coordonnées $B_2(-51, -465)$. Y a-t-il un risque de collision entre les deux avions ?

2 Equations géométriques

2.1 Equations de cercles

Définition :

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et C un cercle de centre $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ et de rayon $R \in \mathbb{R}$.

On a $M(x; y) \in C \iff (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$

Exemple:

Soit C le cercle de centre $A(2; 5)$ et de rayon 3. On a alors l'équation du cercle qui est donné par $C : (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$.

Le point $B(3; 1) \notin C$ car $(3 - 2)^2 + (1 - 5)^2 \neq 9$.

2.2 Equations de droites

Définition:

Soit une droite $\mathcal{D}$ du plan et deux points A, B de cette droite.

On appelle vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$ tout vecteur non nul colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$

! Remarque IMPORTANTE

- Il n'y a pas unicité du vecteur directeur !
- Deux droites parallèles ont la même direction, un vecteur directeur de l'une est vecteur directeur de l'autre.

On peut également définir une droite directement par un vecteur directeur et un point. On a alors :

Propriété:

Soit A un point d'une droite $\mathcal{D}$ et $\vec{u}$ un vecteur directeur.

$M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\iff \det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}) = 0$.

Démonstration:

La démonstration est laissée au lecteur

Définition:

Soit $\mathcal{D}$ une droite quelconque du plan.

Un point $M(x; y)$ est sur la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si il vérifie une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Une telle équation s'appelle équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$.

On a par ailleurs que le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

Exercice:

Donner le vecteur directeur des équations suivantes:

• $2x + 5y - 15 = 0$

• $x + 3y - 2 = 0$

• $y + 3x - 2 = 0$

Exercice:

Déterminer l'équation de la droite passant par la point $A(5; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3 Exercice bilan

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par les points $A(2; -3)$ et $B(5; 6)$. En déduire un vecteur directeur.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point $C(-2; 5)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.
3. Représenter graphiquement dans un repère les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ définies par les équations suivantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection :

$$\mathcal{D} : y = 3x - 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' : y = -5x + 2$$