

Chapitre 2 : Fonctions polynômiales de degré 2

Table des matières

Chapitre 2 : Fonctions polynômiales de degré 2	1
CARPENTIER Axel	
Contenu	2
1 Fonction polynômiale de degré 2	3
2 Forme canonique d'une fonction polynomiale de degré 2	3
3 Variations et représentation graphique	4
4 Résolution d'une équation du second degré	4
5 Factorisation d'un trinôme	6
6 Signe d'un trinôme	7
7 Exercice bilan	7

Contenu

- Fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée. Racines, signe, expression de la somme et du produit des racines.
- Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré. Discriminant. Factorisation éventuelle. Résolution d'une équation du second degré. Signe.

1 Fonction polynômiale de degré 2

Définition:

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On appelle fonction polynômiale de degré 2 toute fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemple:

Les fonctions $f : x \mapsto 3x^2 - 7x + 3$; $g : x \mapsto 3 - 2x^2$; $h : x \mapsto (x - 4)(x + 3)$ sont des polynômes de degré 2

Les fonctions $F : x \mapsto 6x - 1$ et $G : x \mapsto x^4 + x^2 + 1$ ne le sont pas.

2 Forme canonique d'une fonction polynomiale de degré 2

Propriété:

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Toute fonction polynômiale f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $f : x \mapsto a(x - \alpha)^2 + \beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Cette écriture s'appelle la forme canonique de f .

Démonstration:

En effet, pour un tout réel x , on sait que $a \neq 0$ d'où :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c \\ &= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] + c \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - a \frac{b^2}{4a^2} + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &= \boxed{a(x - \alpha)^2 + \beta} \text{ où } \boxed{\alpha = -\frac{b}{2a}} \text{ et } \boxed{\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}} \end{aligned}$$

Exemple:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $2x^2 - 20x + 10 = 2(x - 5)^2 - 40$

! Remarque

Pour écrire un trinôme sous sa forme canonique, il est possible d'utiliser les deux dernières formules donnant α et β à condition de les connaître.

3 Variations et représentation graphique

Propriété:

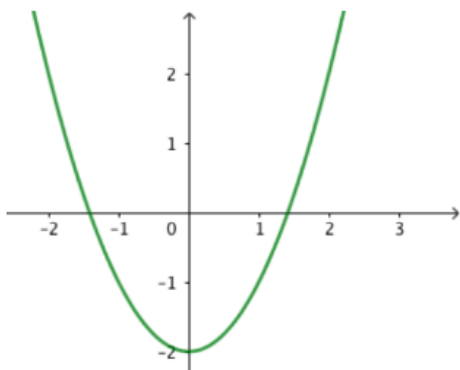
Soient $(a, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et f une fonction polynomiale de degré 2 donnée par sa forme canonique :
 $f : x \mapsto a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a \neq 0$.

- Si $a > 0$, f est d'abord décroissante puis croissante (forme de "sourire") et admet un minimum en α de valeur β .
- Si $a < 0$, f est d'abord croissante puis décroissante (forme de "grimace") et admet un maximum en α de valeur β .

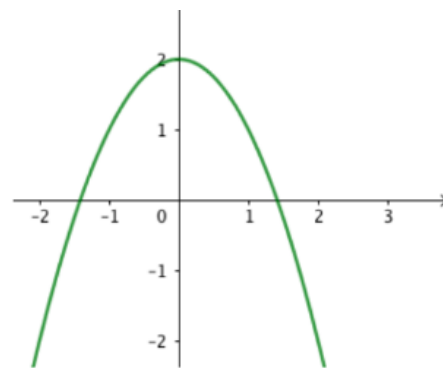
Démonstration:

La démonstration est laissée au lecteur, elle repose sur la définition de la croissance.

$a > 0$



$a < 0$



x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f		$f(-\frac{b}{2a})$	

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f		$f(-\frac{b}{2a})$	

! Remarque

La représentation graphique d'une fonction polynomiale de degré 2 est une parabole ayant pour sommet le point de coordonnées $(\alpha; \beta)$.

4 Résolution d'une équation du second degré

Définition:

Une équation du second degré est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Une solution de cette équation s'appelle une racine du trinôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Exemple:

Pour $x \in \mathbb{R}$, les équations $5x^2 + 3x - 2 = 0$ et $-3x^2 + 6x + 5 = 2x^2 - 3$ sont des équations du second degré.

Définition:

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on appelle discriminant du trinôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$

Propriété:

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et Δ le discriminant du trinôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c$ admet une unique solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Démonstration:

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ qui peut s'écrire sous forme canonique : $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

- Si $\Delta < 0$ alors f est de signe constant donné par le signe de a et donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
- Si $\Delta = 0$ on a $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \iff x = -\frac{b}{2a}$ et donc l'équation $f(x)$ admet une unique solution.
- Si $\Delta > 0$ on a :

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{\Delta}{4a}}\right)^2 = \left(\sqrt{a}x + \frac{\sqrt{ab}}{2a} - \sqrt{\frac{\Delta}{4a}}\right)\left(\sqrt{a}x + \frac{\sqrt{ab}}{2a} + \sqrt{\frac{\Delta}{4a}}\right) = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

D'où le résultat

Exercice:

Soit $x \in \mathbb{R}$, résoudre les équations suivantes :

- $2x^2 - x - 6 = 0$
- $2x^2 - 3x = -\frac{9}{8}$
- $2x^2 + 3x + 5 = x^2 - 5$

Propriété:

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, la somme s et le produit p des racines d'un polynôme de degré 2 de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ sont données par $s = -\frac{b}{a}$ et $p = \frac{c}{a}$

Démonstration:

La démonstration est laissée au lecteur.

5 Factorisation d'un trinôme

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et f une fonction polynômiale de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Nous avons vu précédemment que, pour $x \in \mathbb{R}$, nous pouvons écrire $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} &= 0 \\ \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{\Delta}{4a} \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{\Delta}{4a^2} \end{aligned}$$

On a donc différents cas possibles :

- Si $\Delta < 0$: L'équation n'a pas de solution.
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une unique solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$, on a
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} &= -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \text{ ou } x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

Propriété:

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et f une fonction polynômiale de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de forme factorisée.
- Si $\Delta = 0$, on a pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$, on a pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Démonstration:

La démonstration a été effectuée précédemment.

Exercice:

Exprimer, lorsque c'est possible, les fonctions polynômiales suivantes sous forme factorisée :

- $f : x \mapsto 2x^2 - x - 6$
- $g : x \mapsto 2x^2 - 3x + \frac{9}{8}$
- $h : x \mapsto x^2 + 3x + 10$

6 Signe d'un trinôme

Méthode:

Pour déterminer le signe d'un polynôme de degré 2, on l'exprime d'abord sous forme factorisée puis on étudie le signe de chaque facteur.

Exercice:

Etudier le signe des fonctions polynômiales suivantes :

- $f : x \mapsto 2x^2 - x - 6$

- $g : x \mapsto 2x^2 - 3x + \frac{9}{8}$

- $h : x \mapsto x^2 + 3x + 10$

7 Exercice bilan

Soit $f : x \mapsto 4x^2 - 5x + 3$ une fonction polynômiale de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les racines de f .
2. Exprimer f sous forme factorisée.
3. Résoudre l'équation $f(x) > 0$.