Chapitre 3 : Probabilités Conditionnelles

Table des matières

Contenu

- Probabilité conditionnelle d'un événement B sachant un événement A de probabilité non nulle. Notation $\mathbb{P}_B(A)$. Indépendance de deux événements.
- Arbres pondérés et calcul de probabilités : règle du produit, de la somme.
- Partition de l'univers (systèmes complets d'événements). Formule des probabilités totales.
- Succession de deux épreuves indépendantes. Représentation par un arbre ou un tableau.

1 Rappels

Définition:
On appelle expérience aléatoire une expérience dont le résultat est dû au hasard.
Une issue x_i est un résultat possible de l'expérience aléatoire.
On note $\Omega = \{x_1; x_2; x_3; ...\}$ l'ensemble des issues possibles, appelé l'univers.
Un évènement est composé d'une ou plusieurs issues (entre accolade). S'il n'y a qu'une issue, on dit qu'il est élémentaire.

Exemple:

- On lance un dé numéroté de 1 à 6. On a $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. L'évènement "obtenir un 5" est élémentaire mais l'évènement "obtenir un nombre pair" ne l'est pas.
- On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. On a $\Omega = \{7 \text{ coeur }, 7 \text{ carreau }, ... , \text{as pique }, \text{as trefle}\}$. L'évènement "tirer le 7 de coeur" est élémentaire mais l'évènement "tirer un pique" ne l'est pas.

2 Probabilité conditionnelle

Définition:
Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. On considère un évènement B dans Ω de probabilité non nulle $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
Pour tout évènement A, on appelle probabilité de A sachant B, noté $\mathbb{P}_B(A)$ (ou $\mathbb{P}(A|B)$) la quantité :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\text{Nombre de cas pour A} \cap B}{\text{Nombre de cas pour A}}$$

D'après la définition précédente, on a que pour deux événements A et B :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

On en déduit donc la propriété suivante :

Propriété:
Dans certain cas on peut être amené à connaître la probabilité conditionnelle.
On a alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$

Exemple:
Dans un sac de dragées, 60% des dragées sont de couleur bleue, 30% des dragées sont bleues et à l'amande et 40% des dragées bleues sont au chocolat. On choisit une dragée au hasard dans le sac. On note les événements :

- A : "la dragée est à l'amande"
- B : "la dragée est bleue"
- C : "la dragée est au chocolat"

La probabilité d'obtenir une dragée à l'amande sachant qu'elle est bleue est $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{0,3}{0.6} = 0,5$
La probabilité d'obtenir une dragée bleue et au chocolat est $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(C) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$

ATTENTION

Les quantités $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$ n'ont AUCUNES raisons d'être égales

3 Indépendance

Définition:
Deux événements A et B sont dits indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Exercice:
On lance deux fois de suite une pièce de monnaie.
On considère les événements A : "obtenir pile au premier lancer" et B : "obtenir deux résultats identiques". Ces deux événements sont-ils indépendants ?

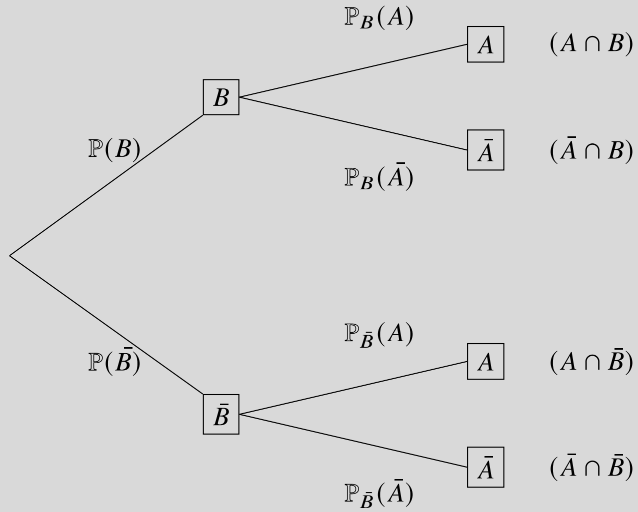
4 Arbre de probabilités

Définition:
Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et $n \in \mathbb{N}$.
Notons, pour $i \in \{1, ..., n\}$, A_i un évènement (donc A_i est un sous-ensemble de Ω).
On dit que $(A_i)_{i \in \{1,...,n\}}$ est un système complet d'évènements si et seulement si :

- $\forall i \in \{1, ..., n\}, A_i \neq \emptyset$
- $\forall (i, j) \in \{1, ..., n\}^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Exemple:
Dans une urne, on a des cubes et des boules rouges et verts, on tire un de ces objets.
Soit A_1 : "L'objet tiré est un cube" et A_2 : "L'objet tiré est une boule". Alors (A_1,A_2) est un système complet d'événements.

Définition:
Considérons une expérience aléatoire quelconque d'univers Ω et deux événements A et B.
Il est possible de représenter les possibilités de l'expérience aléatoire par un arbre de probabilité :



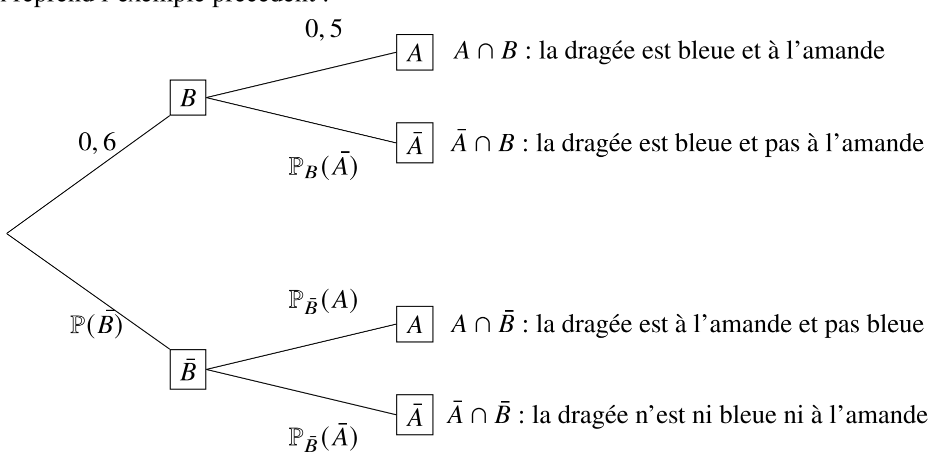
Une branche (ou segment) représente une probabilité, conditionnelle à partir du premier événement.
Un noeud est une jonction entre deux branches, représentant un événement conditionnant un autre.
Un chemin est un événement finalement réalisé, en suivant des branches successives.

Propriété:
La somme des probabilités des branches issues d'un noeud est 1.
La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités associées à ses branches.
La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y mènent :
$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B)$

Démonstration:

- Le premier point est immédiat par définition d'un système complet d'événements et d'une probabilité.
- Le deuxième point a été démontré précédemment.
- Le troisième point est immédiat par définition d'un système complet d'événements.

Exemple:
On reprend l'exemple précédent :



On en déduit : $\mathbb{P}(\bar{B}) = 0,4$ et $\mathbb{P}_B(\bar{A}) = 0,5$ et on retrouve les résultats précédemment trouvés.

Propriété: *Formule des probabilités totales*
Soit $n \in \mathbb{N}$, $(A_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ un système complet d'événements et B un évènement quelconque. On a alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

Démonstration: *(Hors programme)*
On a : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap \Omega) = \mathbb{P}\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$

5 Exercice bilan

Un site internet a une audience séparée en deux types : les respectueux qui représentent 90% des inscrits et les trolls 10%. Les premiers ont une probabilité de $0,1$ de participer à une discussion houleuse sur une journée, les seconds $0,7$.
Un nouvel utilisateur s'inscrit. Avec quelle probabilité participe-t-il à une discussion houleuse dès le premier jour ? Dans les deux premiers jours ? Notons T l'événement "le nouvel arrivant est un troll" et H l'événement "il participe à une discussion houleuse".
Construire un arbre pondéré réprésentant la situation puis calculer $\mathbb{P}(H)$.