Chapitre 6 : Dérivée locale

Table des matières

Chapitre 6 : Dérivée locale 1
CARPENTIER Axel
Contenu 2
1 Nombre dérivé 3
2 Tangente 4
3 Exercice bilan 5

Contenu

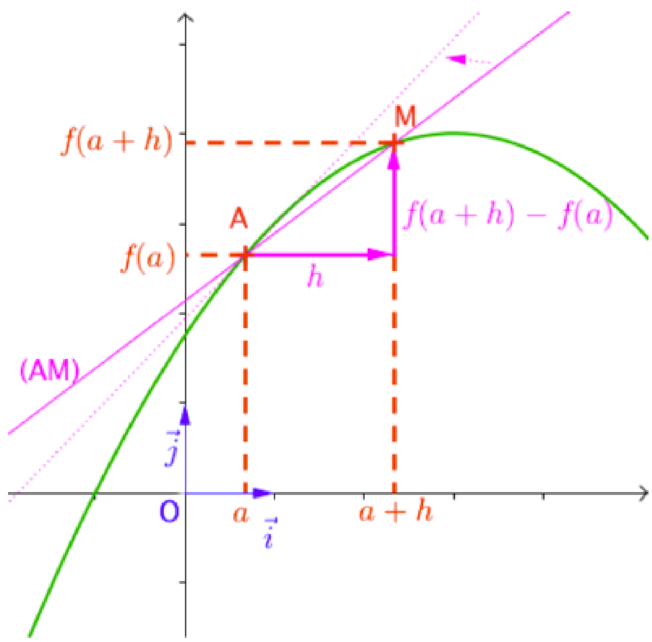
- Taux de variation. Sécantes à la courbe représentative d'une fonction en un point donné.
- Nombre dérivé d'une fonction en un point, comme limite du taux de variation. Notation $f'(a)$.
- Tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point, comme "limite des sécantes". Pente. Équation : la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

1 Nombre dérivé

Rappels:
On a vu dans le cours sur les fonctions affines que si a une fonction affine $f(x) = ax+b$ et qu'on connait les coordonnées de deux points $A(x_1, f(x_1))$ et $B(x_2, f(x_2))$. Alors le coefficient directeur de la fonction f est donné par $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ qui est le taux de variation entre les points x_1 et x_2.

Donc à partir des coordonnées de deux points, on peut déterminer l'inclinaison de la droite passant par ces deux points.

On considère donc cette fois une fonction f quelconque. On s'intéresse aux points de coordonnées $A(a, f(a))$ et $M(a + h, f(a + h))$



D'après le rappel précédent, on peut donc calculer le coefficient directeur de la droite (AM) qui est donné par :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Lorsque le point M se rapproche de A, on va avoir que h se rapproche de plus en plus de 0. Ceci signifie donc que le coefficient directeur de la droite (AM) va être égal à la limite de $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ quand h tend vers 0.

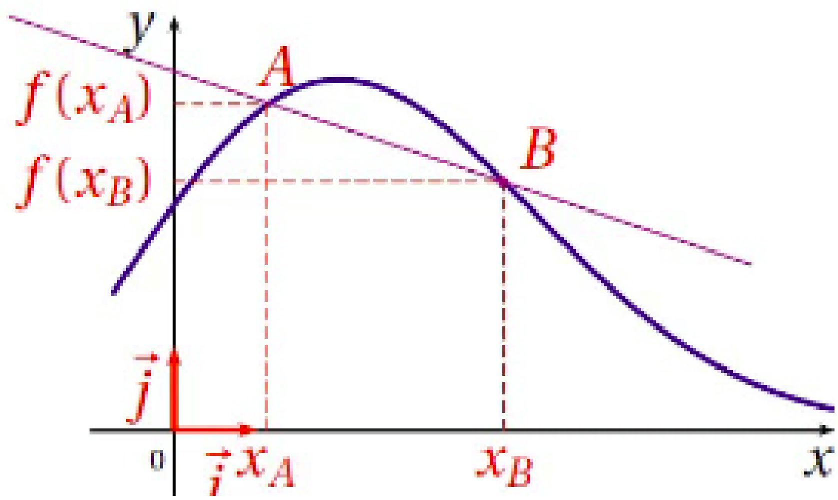
Définition:
Ce coefficient directeur s'appelle le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$ et on a :
$f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ On dira que f est dérivable en a.

On ne peut pas évaluer en $h = 0$ directement car c'est une valeur interdite. On introduit pour cela la notion de limite, pour certaines fonctions f, le taux d'accroissement va être fini. Exemple : limite de $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x+1)^2 - 1}{x} = 2$

Il se peut que la limite ne soit pas finie, on dira que f n'est pas dérivable en a. Exemple : la fonction racine carrée

Remarque

Le taux de variation représente la moyenne de la vitesse de variation de la fonction entre deux points (même éloignés).



Le nombre dérivé étant la limite de quand ces deux points sont quasiment les mêmes, on obtient donc non pas une moyenne mais la vitesse instantanée. Exemple : Voiture en déplacement rectiligne
.

Exercice:
Soit $f(x) = x^2 + 2x - 3$, calculer le nombre de dérivé de f en 2.

2 Tangente

On a vu que lorsque h se rapproche de 0, le point M se rapproche de A et que donc le taux de variation se rapproche du nombre dérivé $f'(a)$. Par ailleurs, la droite (AM) tend à être tangente à la courbe de f.

Définition:
La courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente (T) de coefficient directeur $f'(a)$

Remarque

La tangente à une courbe en un de ses points est une droite qui "touche" la courbe au plus près au voisinage de ce point.

La tangente est une droite de coefficient directeur $f'(a)$ donc a pour expression : $(T) : y = f'(a)x + b$. Or $A(a, f(a)) \in (T)$ d'où $f(a) = f'(a)a + b$ et donc au final on a l'équation de la tangente donnée par :

$$\boxed{(T) : y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

.

L'idée n'est pas de retenir par coeur la formule précédente mais de savoir la retrouver.

<u>Méthode</u>:
Soit f une fonction quelconque et $A(a, f(a))$ sur le courbe de f. On veut déterminer la tangente à la courbe de f au point A:

- Déterminer $f(a)$ si on ne le connait pas déjà ;
- Déterminer le nombre dérivé $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$;
- La tangente au point A est donc de la forme $y = f'(a)x + b$, pour déterminer b on évalue l'équation de la tangente au point A ;
- Représenter graphiquement la tangente revient à tracer une fonction affine.

<u>Exercice:</u>
Déterminer l'équation de la tangente des fonctions suivantes aux points suivants:

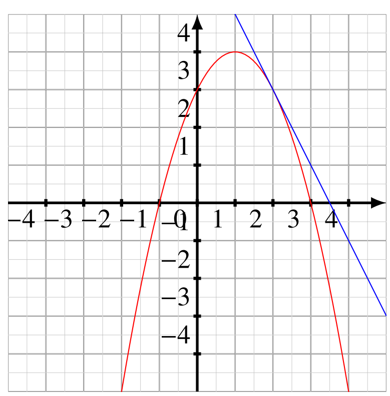
- $f(x) = x^2$ au point $A(1, 1)$.
- $f(x) = x^3$ au point $A(1, 1)$.

<u>Exercice:</u>
Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a dans les cas suivants :

- $a = -3$, $f(-3) = 1$ et $f'(-3) = 2$.
- $a = 5$, $f'(5) = -5$ et la tangente passe par le point de coordonnées $(1, -1)$.
- $a = 1$, $f(1) = 3$ et (T) est parallèle à la droite d'équation $y = x - 1$.

3 Exercice bilan

On considère la fonction $f : x \mapsto -(x+1)(x-3)$ définie sur $[-5; 5]$. La courbe représentative C_f est donnée ci-dessous.



1. On a représenté ci-dessus la tangente à C_f au point d'abscisse 2. Déterminer graphiquement $f'(2)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse $-0,5$ sachant que $f'(-0,5) = 3$. Tracer cette droite le plus précisément possible dans le repère.