

Chapitre 7 : Variables aléatoires

Table des matières

Chapitre 7 : Variables aléatoires	1
CARPENTIER Axel	
Contenu	2
1 Introduction	3
2 Lois de probabilité	3
3 Espérance/ Variance & Ecart-type	4
4 Exercice bilan	5

Contenu

- Variable aléatoire réelle : modélisation du résultat numérique d'une expérience aléatoire ; formalisation comme fonction définie sur l'univers et à valeurs réelles.
- Loi d'une variable aléatoire.
- Espérance, variance, écart type d'une variable aléatoire.

1 Introduction

On s'intéresse à deux personnes qui jouent à lancer chacun leur tour deux dés non truqués, le gagnant est celui pour qui la somme des deux dés est la plus grande.

On conçoit bien que seul la somme des deux comptes et pas la manière de faire cette somme (2 et 6, 3 et 4, 4 et 4 pour faire 8)

On va alors créer une variable X qui associe à chaque lancer la somme des deux dés. Chaque valeur possible de cette somme a une probabilité qui lui est associée. (probabilité de faire 2,3,4...)

On convient de dire que X est une variable aléatoire.

Définition:

Soit une expérience aléatoire donnée d'univers Ω . On définit une variable aléatoire X sur Ω si à tout élément de Ω on associe un élément de $\mathbb{R}$.

En notant $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X . On va noter $\{X = x_i\}$ l'événement regroupant l'ensemble des issues auxquelles on associe le réel x_i

! Remarque

En reprenant l'exemple introductif avec les lancers de dés. On a l'analogie entre les notations :
 $\{X = 8\} \longleftrightarrow$ "La somme des deux dés est égale à 8"

C'est une sorte de "traduction" du langage courant en langage mathématiques.

On peut de même définir l'évènement:

$\{X \leq 8\} \longleftrightarrow$: "La somme des deux dés est inférieure ou égale à 8"

Exemple:

On prend pour autre exemple un sac contenant cinq billes (1 verte, 2 rouges, 2 bleues). Tirer la verte fait perdre 10 euros, une rouge gagner 1 euro, une bleue 4 euros. On peut définir alors une variable aléatoire X qui prendra les valeurs du gain à savoir $E = \{-10, 1, 4\}$

2 Loïs de probabilité

Définition:

Soit X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans $E = \{x_1, \dots, x_n\}$. On a vu qu'on pouvait noter $\{X = x_i\}$ l'événement "X prend la valeur x_i ". On définit alors une loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ associée à cet événement : $\mathbb{P}_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$

Il est possible de représenter une loi de probabilité par un tableau :

x_i	x_1	...	x_n
$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$	p_1	...	p_n

Exemple:

En reprenant l'exemple précédent des billes, on a $E = \{-10, 1, 4\}$ et :

$$\mathbb{P}(X = -10) = \frac{1}{5};$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{5};$$

$$\mathbb{P}(X = 4) = \frac{2}{5};$$

En représentant ces données dans un tableau on a :

x	-10	1	4
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

Exemple:

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 1 euro si on fait deux fois pile, on gagne 2 euros si on fait deux fois face, sinon on perd 3 euros. On définit G la variable aléatoire donnant le gain algébrique en euros. Les valeurs prises par G sont $-3, 1$ ou 2 . La loi de probabilités de G est donnée par :

k	-3	1	2
$\mathbb{P}(G = k)$	0,5	0,25	0,25

3 Espérance/ Variance & Ecart-type

On connaît donc le formalisme adéquat à la représentation d'expérience aléatoire. Dans l'exemple précédent, on a donc les probabilités de gain, mais alors qu'est ce que ça nous dit ? On aimerait bien savoir si le jeu est favorable ou pas, c'est-à-dire si j'ai en moyenne plus de chance de gagner ou de perdre.

Définition:

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $\mathbb{P}_X$ sa loi de probabilité. On définit :

- L'espérance : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbb{P}(X = x_k) = x_1 \mathbb{P}(X = x_1) + \dots + x_n \mathbb{P}(X = x_n)$
- La variance : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \sum_{k=1}^n (x_k - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x_k)$
- L'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$

! Remarque

L'espérance peut s'interpréter comme la moyenne des valeurs prises par X quand l'expérience aléatoire est répétée un très grand nombre de fois.

Propriétés:

Soit X une variable aléatoire et a, b deux réels. On a :

- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$
- $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$
- $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

Démonstration: (Hors programme)

Le premier se démontre via le théorème de transfert. Le deuxième est une conséquence du premier. Le troisième est une conséquence de la linéarité de l'espérance.

Exemple:

En reprenant encore l'exemple du sac de bille on calcule l'espérance du gain et on obtient:

$$\mathbb{E}(X) = -10 \cdot \mathbb{P}(X = -10) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 4 \cdot \mathbb{P}(X = 4)$$

$$\mathbb{E}(X) = -10 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{2}{5} = 0$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^n x_k^2 \mathbb{P}(X = x_k) = (-10)^2 \mathbb{P}(X = -10) + 1^2 \mathbb{P}(X = 1) + 4^2 \mathbb{P}(X = 4) = \frac{132}{5}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\frac{132}{5}}$$

Exercice:

On joue avec au pile ou face avec une pièce truquée. La probabilité de faire pile est de 0,83. Si on obtient pile, on gagne 2 euros, sinon on perd 6 euros. Le jeu est-il équitable ?

4 Exercice bilan

Un joueur lance trois fois de suite une pièce truquée qui a 60% de tomber sur Face. On note X la variable aléatoire qui détermine le nombre de Face obtenu sur trois lancers.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer les valeurs prises par X .
3. Décrire l'événement $\{X = 1\}$ puis calculer sa probabilité.
4. Décrire l'événement $\{X < 3\}$ puis calculer sa probabilité.
5. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X .