Chapitre 8 : Dérivation

Table des matières

Contenu

- Fonction dérivable sur un intervalle. Fonction dérivée.
- Fonction dérivée des fonctions carré, cube, inverse, racine carrée.
- Opérations sur les fonctions dérivables : somme, produit, inverse, quotient, fonction dérivée de $x \mapsto g(ax+b)$.
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$.
- Fonction valeur absolue : courbe représentative, étude de la dérivabilité en 0.
- Lien entre le sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle et signe de sa fonction dérivée ; caractérisation des fonctions constantes.
- Nombre dérivé en un extremum, tangente à la courbe représentative.

1 Fonction dérivée

Définition:
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que la fonction f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.
On définit alors la fonction dérivée de f, noté f', qui a tout $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x.
L'ensemble de définition de la dérivée f' est appelée ensemble de dérivation de f.

! Remarque

La dérivée f' de f définit donc bien une fonction, son ensemble de définition est appelé ensemble de dérivation de f.

On définit donc la fonction dérivée telle que $\forall x \in I, f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Exemple:
On va chercher à déterminer la dérivée de la fonction $\forall x \in I, f(x) = x^2$ sur $I = \mathbb{R}$.
Soit $x \in I$, on a $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \dfrac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = 2x+h$
Donc on a $\forall x \in I, f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x$.

En effectuant exactement le même processus de calcul, on peut déterminer des dérivées d'autres fonctions usuelles vues cette année.

	Fonction f	**Dérivée** f'
Constante	$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Linéaire	$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a$
Carré	$f(x) = ax^2, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 2ax$
Puissance	$f(x) = ax^n, (a,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nax^{n-1}$
Inverse	$f(x) = \dfrac{a}{x}, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = -\dfrac{a}{x^2}$
Racine carrée	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Comme vu dans le dernier cours sur la dérivation, apprendre l'équation de la tangente par coeur n'est pas nécessaire tant que la méthode est comprise.
Ici il va être important de bien connaître les dérivées par coeur même si savoir la méthode de démonstration est intéressante elle peut-être très fastidieuse. (Dérivée de la fonction cube implique de faire un double développement).

Exercice:
Dériver les fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivabilité :

- $f : x \mapsto 4x - 3$
- $g : x \mapsto 2x^2$
- $h : x \mapsto \dfrac{2}{x}$
- $p : x \mapsto x^5$

2 Opérations sur les dérivées

Propriétés:
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel :

- Somme : $(u+v)' = u' + v'$;
- Produit par un scalaire : $(ku)' = ku'$;
- Produit de fonctions : $(uv)' = u'v + uv'$;
- Quotient : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, si v ne s'annule pas sur I.

Démonstration:
Les deux premiers points sont immédiats par linéarité de la limite. Montrons les deux derniers points.

- $$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(uv)(x+h)-(uv)(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} v(x+h)\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \lim_{h\to 0} u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\\ &= u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\end{aligned} \tag{1}$$

- On a que $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$. Il suffit donc de montrer que $\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{v'}{v^2}$ pour obtenir le résultat.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{v(x+h)}-\frac{1}{v(x)}}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{v(x)-v(x+h)}{v(x+h)v(x)}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} -\frac{1}{v(x)v(x+h)}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\\ &= -\frac{v'(x)}{v^2(x)}\end{aligned} \tag{2}$$

Exercice:
Dériver les fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivabilité:

- $f : x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$
- $g : x \mapsto 5x^3 - 2$
- $h : x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$
- $\phi : x \mapsto \frac{5x}{x^2+1}$
- $\psi : x \mapsto \frac{x\sqrt{x}}{3}$

Propriétés:
Soit g une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soient a et b des réels quelconques. Alors, la fonction f, définie par $f : x \mapsto g(ax+b)$, est dérivable sur I: $\forall x \in I$, $f'(x) = a \times g(ax+b)$.

Démonstration:
On a

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to0}\frac{g(a(x+h)+b)-g(ax+b)}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h}\times\frac{g(a(x+h)+b)-g(ax+b)}{a(x+h)+b-(ax+b)}\\ &= a\times g'(ax+b)\end{aligned} \tag{3}$$

Exercice:
Dériver les fonctions suivantes sur leur intervalle de dérivabilité :

- $f : x \mapsto (2x+1)^2$
- $g : x \mapsto \sqrt{5x-7}$

3 Application à l'étude des variations d'une fonction

Propriétés fondamentales:
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est strictement croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) > 0$;
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) < 0$;
- f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) = 0$;

Soit $a \in I$, si $f'(a) = 0$ et f change de signe en a, alors a est un extremum de f (maximum ou minimum).

Démonstration:
La démonstration est laissée au lecteur, il s'agit d'exploiter la définition du taux de variation.
Exercice:
On cherche à étudier les variations de la fonction $f(x) = 2x^2 + 8x - 5$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- On commence par déterminer la dérivée de f.
  On a $f'(x) = 4x + 8$
- On étudie le signe de cette dérivée.
  On a $f' < 0$ sur $]-\infty; -2[$ et $f' > 0$ sur $]-2; +\infty[$
- On en déduit les variations de f par la propriété fondamentale.
  On a f strictement décroissante sur $]-\infty; -2[$ et strictement croissante sur $]-2; +\infty[$
- On trace le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$+\infty$

- On cherche les extremums de la fonction f.
  On a que f' ne s'annule que en -2 et change de signe donc f atteint son minimum en -2 qui vaut $f(-2)$

4 Exercice bilan

Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes sur l'intervalle I :

1. $f : x \mapsto \dfrac{3x}{4x-6}$ sur $I =]-3; 2]$.
2. $g : x \mapsto \cos(x)\sin(x)$ sur $I =]-\pi; \pi]$.