

Chapitre 10 : Fonction exponentielle

Table des matières

Chapitre 10 : Fonction exponentielle	1
CARPENTIER Axel	
Contenu	2
1 Définition et caractérisation	3
2 Relation fonctionnelle	3
3 Etude de la fonction exponentielle	4
4 Dérivation	5
5 Exercice bilan	6

Contenu

- Définition de la fonction exponentielle, comme unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence et l'unicité sont admises. Notation $\exp(x)$.
- Pour tous réels x et y , $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$ et $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$. Nombre e . Notation e^x .
- Pour tout réel a , la suite $(e^n a)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
- Signe, sens de variation et courbe représentative de la fonction exponentielle.

1 Définition et caractérisation

Définition:

On appelle fonction exponentielle, notée $\exp$, l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Propriété:

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. C'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.

Démonstration:

Considérer la fonction $g : x \mapsto \exp(x) \times \exp(-x)$ et remarquer qu'elle est constante.

2 Relation fonctionnelle

Propriété:

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Démonstration:

Par construction de la fonction

Exemple:

- $\exp(2) \times \exp(3) = \exp(2 + 3) = \exp(5)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \times \exp(-x) = \exp(x + (-x)) = \exp(0) = 1$

! Remarque

Cette propriété se généralise pour plusieurs facteurs.

Théorème et notation:

On notera $\exp(1) = e$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$.

Démonstration:

La démonstration est laissée au lecteur.

Il est donc possible de réécrire les propriétés précédentes avec ces nouvelles notations :

- $(x \mapsto e^x)' = x \mapsto e^x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^0 = 1$

On en déduit également que la fonction exponentielle possède les mêmes propriétés que les fonctions puissances.

- $\forall a \in \mathbb{R}, e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (e^a)^b = e^{ab}$

Exercice:

Simplifier les expressions suivantes :

- $A = e^3 \times e^{-4} \times e^2$
- $B = \frac{e^{-3}}{e^2}$

- $\forall x \in \mathbb{R}, C(x) = (e^{3x})^2$

- $\forall x \in \mathbb{R}, D(x) = e \times (e^x)^{-4}$

! Remarque

Soit $a \in \mathbb{R}$, la suite $(e^{na})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison e^a .

3 Etude de la fonction exponentielle

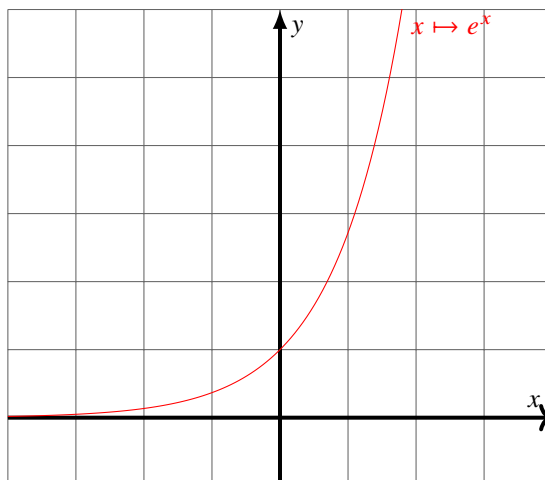
Propriété:

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration:

La démonstration est laissée au lecteur.

D'après les données que l'on a de la fonction exponentielle nous pouvons donc en déduire sa représentation graphique ci-dessous :



! Remarque

Par construction de la fonction exponentielle on a donc pour tous $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

- $e^a = e^b \iff a = b$
- $e^a > e^b \iff a > b$

Exercice:

Résoudre les équations et les inéquations suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- $e^x = e^6$
- $e^x < e^{-2}$
- $e^{x^2} - e^{-2} = 0$
- $e^{x^2+5x} - e^6 < 0$

4 Dérivation

Rappel:

La fonction exponentielle est construite telle qu'elle est égale à sa dérivée. C'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x \mapsto e^x)' = x \mapsto e^x$.

Exercice:

Pour $x \in \mathbb{R}$, dériver les fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivabilité :

- $f : x \mapsto xe^x$
- $g : x \mapsto \frac{e^x}{x+1}$
- $h : x \mapsto \frac{2x+1}{e^x}$

Il est également possible d'introduire des fonctions de la forme $f : x \mapsto e^{3x+2}$ et $g : x \mapsto e^{x^2+5}$ qui sont bien des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Définition:

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $u : I \rightarrow J$ une fonction dérivable sur I et f la fonction définie sur I par $f : x \mapsto e^{u(x)}$. f est alors une fonction dérivable sur I et de dérivée $f' : x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

Exercice:

Dériver les fonctions $f : x \mapsto e^{3x+2}$ et $g : x \mapsto e^{x^2+5}$ sur leur ensemble de dérivabilité.

5 Exercice bilan

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0; 10]$ et telle que $f'(t) = 0,14f(t)$.

1. Montrer que la fonction $f(t) = Ae^{0,14t}$ convient.
2. On suppose que $f(0) = 50\,000$. Calculer A .
3. Etudier les variations de f sur $[0; 10]$.