

Chapitre 11 : Calcul vectoriel et produit scalaire

Table des matières

Chapitre 11 : Calcul vectoriel et produit scalaire	1
CARPENTIER Axel	
Contenu	2
1 Définition et caractérisations	3
1.1 Aspect trigonométrique	3
1.2 Aspect projectif	4
1.3 Aspect analytique	5
2 Equations analytiques	5
2.1 Equations de cercles	5
2.2 Equations de droites	6
3 Géométrie du triangle	7
3.1 Théorème de la médiane	7
3.2 Théorème d'Al-Kashi	9
4 Exercice bilan	9

Contenu

- Produit scalaire à partir de la projection orthogonale et de la formule avec le cosinus. Caractérisation de l'orthogonalité.
- Bilinearité, symétrie. En base orthonormée, expression du produit scalaire et de la norme, critère d'orthogonalité.
- Développement de $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$. Formule d'Al-Kashi.
- Transformation de l'expression $\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle$.

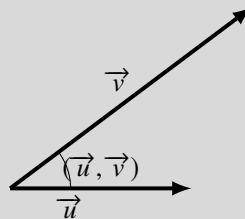
1 Définition et caractérisations

1.1 Aspect trigonométrique

Définition/Propriété:

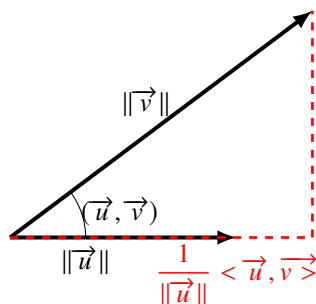
Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$. On appelle produit scalaire le nombre réel $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ (ou $\vec{u} \cdot \vec{v}$) défini par :

- $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.



Démonstration:

En effet, cette caractérisation utilise des notions connues depuis le collège avec un formalisme nouveau:



$$\begin{aligned} \text{On a } \cos(\vec{u}, \vec{v}) &= \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypothénuse}} \\ &= \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|} \\ \iff \cos(\vec{u}, \vec{v}) &= \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|} \\ \iff \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ \text{D'où le résultat souhaité.} \end{aligned}$$

Exemple:

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 2. On a alors :

$$\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = 2 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

Définition/Propriété:

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs colinéaires. On définit le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ par :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{Si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens} \\ -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{Si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

Exemple:

Soient A, B, C et D quatre points alignés tels que $AB = 2$, $BC = 3$ et $CD = 1$.

On a alors : $\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| = 2 \times 5 = 10$ et $\langle \vec{AD}, \vec{CB} \rangle = -\|\vec{AD}\| \times \|\vec{CB}\| = -6 \times 3 = -18$

Propriété:

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs quelconques et un nombre réel k , on a :

- $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$
- $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$
- $\langle \vec{u}, k\vec{v} \rangle = k\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = k\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

! Remarque

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2, \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2.$$

Propriétés:

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$. On a :

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|)(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)$

Démonstration:

En effet, en se rappelant la définition du produit scalaire on a :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$$

La deuxième égalité découle immédiatement des formules des "identités remarquables" classiques.

! Remarque

En utilisant la première égalité de la propriété précédente, on obtient une autre manière de calculer un produit scalaire :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \text{ et } \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Exercice:

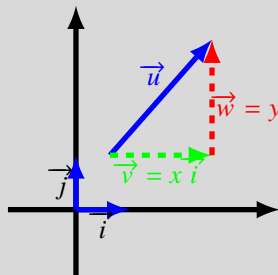
- $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AD = 5$ et $AC = 8$. Calculer $\langle \vec{AB}, \vec{AD} \rangle$.
- ABC est un triangle tel que : $AB = 7$, $BC = 8$, $CA = 9$. I est le milieu de $[BC]$. Calculer $\langle \vec{AI}, \vec{AC} \rangle$.

1.2 Aspect projectif

Définition:

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le vecteur $\vec{u}$ se décompose selon les deux axes du repère en deux vecteurs $\vec{v} = x\vec{i}$ et $\vec{w} = y\vec{j}$ de telle sorte que :

- $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$
- $\vec{v}$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur l'axe des abscisses.
- $\vec{w}$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur l'axe des ordonnées.



Exemple:

Pour $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on a $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Définition:

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux si et seulement si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

Exercice:

On considère un carré $ABCD$ de côté a et de centre O . Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$. Calculer, en fonction de a , les produits scalaires suivants :

$\langle \vec{AB}, \vec{AK} \rangle, \langle \vec{AB}, \vec{OD} \rangle, \langle \vec{AD}, \vec{AC} \rangle, \langle \vec{AD}, \vec{OI} \rangle, \langle \vec{BC}, \vec{OJ} \rangle, \langle \vec{KL}, \vec{BD} \rangle$.

1.3 Aspect analytique

Nous avons exclusivement vu des caractérisations pour déterminer le produit scalaire de deux vecteurs de par des connaissances géométriques (longueurs, angles,...). Or nous savons qu'un vecteur possède nécessairement des coordonnées, dans le cas où nous les connaissons, il existe une dernière méthode pour déterminer ce produit scalaire.

Définition/Propriété:

Soient $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On a alors $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = xx' + yy'$

Exercice:

Calculer le produit scalaire des vecteurs suivants :

• $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

• $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{z} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}$

2 Equations analytiques

2.1 Equations de cercles

Rappel :

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et C un cercle de centre $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ et de rayon $R \in \mathbb{R}$.

On a $M(x; y) \in C \iff (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$

Propriété:

Un point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle = 0$

Démonstration:

En effet :

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle = 0 &\iff (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0 \\ &\iff x^2 - (x_A + x_B)x + x_A x_B + y^2 - (y_A + y_B)y + y_A y_B = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + x_A x_B + \left(y - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 - \left(\frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 + y_A y_B = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 = \frac{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}{4} = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

On obtient donc bien l'équation d'un cercle dont le centre est le milieu de $[AB]$ et le rayon est la moitié de AB , c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$.

Exemple:

Soit $A(-3; 2)$, $B(4; 8)$. Une équation du cercle de diamètre $[AB]$ est : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 - x - 10y + 4 = 0$

2.2 Equations de droites

Nous avons vu dans un chapitre précédent qu'il était possible de définir une équation de droite à l'aide d'un vecteur directeur via la notion de déterminant. Nous allons voir ici qu'il est également possible de définir une équation de droite à l'aide d'un vecteur dit normal via la notion de produit scalaire.

Définition:

Soit d une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, on appelle vecteur normal (généralement noté $\overrightarrow{n}$) à d tout vecteur non nul orthogonal à $\overrightarrow{u}$.

! Remarque

Il n'y a pas unicité du vecteur normal !

Rappel:

Une droite a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ si et seulement si elle admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Propriété:

Une droite a pour vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ si et seulement si elle admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exemple:

La droite d'équation $y = 3x - 2$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Propriété:

Soit A un point d'une droite $\mathcal{D}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal.

$M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux $\iff \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = 0$.

Démonstration:

La démonstration est laissée au lecteur

Exercice:

Déterminer l'équation de la droite passant par la point $A(5; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

! Remarque

On a les équivalences suivantes :

- La droite $\mathcal{D}$ a pour équation : $ax + by + c = 0$.
- $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
- $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}$

Propriété:

Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs (ou normaux) orthogonaux.

Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur directeur de l'une est normal à l'autre.

Démonstration:

La démonstration est laissée au lecteur

Exercice:

On considère les points $A(2; 2)$, $B(6; 0)$ et $C(-3; -3)$.

- Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .
- Déterminer une équation de la médiatrice de $[AB]$.

3 Géométrie du triangle

3.1 Théorème de la médiane

Théorème:

Soient A et B deux points du plan avec I le milieu de $[AB]$. Pour tout point M quelconque du plan on a :

$$\bullet \quad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 \quad \bullet \quad \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 \quad \bullet \quad MA^2 - MB^2 = 2 \langle \overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB} \rangle$$

Démonstration:

Démontrons le premier point, les deux autres seront laissées au lecteur. On a :

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \vec{AM} + \vec{MB} \\ \Leftrightarrow \|\vec{AB}\|^2 &= \|\vec{AM} + \vec{MB}\|^2 \\ \Leftrightarrow \|\vec{AB}\|^2 &= \|\vec{AM}\|^2 + 2 \langle \vec{AM}, \vec{MB} \rangle + \|\vec{MB}\|^2 \\ \Leftrightarrow AB^2 &= MA^2 + MB^2 + 2 \langle \vec{AI} + \vec{IM}, \vec{MI} + \vec{IB} \rangle \\ \Leftrightarrow AB^2 &= MA^2 + MB^2 + 2 \langle \frac{\vec{AB}}{2}, \vec{IM} \rangle + 2 \langle \frac{\vec{AB}}{2}, \frac{\vec{AB}}{2} \rangle - 2MI^2 - 2 \langle \frac{\vec{AB}}{2}, \vec{MI} \rangle \\ \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{\vec{AB}}{2} &= MA^2 + MB^2\end{aligned}\tag{1}$$

Exemple:

Soit $\triangle ABC$ un triangle quelconque tel que $AB = 4$, $BC = 6$ et $CA = 8$. Alors :

$$CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{1}{2}AB^2 \Leftrightarrow 64 + 36 = 2CI^2 + \frac{1}{2} \times 16 \Leftrightarrow CI = \sqrt{46}$$

Applications: (Lieux géométriques)

- Ensemble des points M du plan tels que $\langle \vec{MA}, \vec{MB} \rangle = k$.

$$\langle \vec{MA}, \vec{MB} \rangle = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{1}{4}AB^2.$$

- Si $k < -\frac{1}{4}AB^2$, l'ensemble est vide.
- Si $k = -\frac{1}{4}AB^2$, l'ensemble est réduit au point I .
- Si $k > -\frac{1}{4}AB^2$, l'ensemble est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k + \frac{1}{4}AB^2}$.

- Ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$.

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2} \left(k - \frac{1}{2}AB^2 \right).$$

- Si $k < \frac{1}{2}AB^2$, l'ensemble est vide.
- Si $k = \frac{1}{2}AB^2$, l'ensemble est réduit au point I .
- Si $k > \frac{1}{2}AB^2$, l'ensemble est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{1}{2} \left(k - \frac{1}{2}AB^2 \right)}$.

- Ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = k$.

$$MA^2 - MB^2 = 2 \langle \vec{IM}, \vec{AB} \rangle \Leftrightarrow 2 \langle \vec{IM}, \vec{AB} \rangle = k.$$

Soit M' sur (AB) tel que $2 \langle \vec{IM}', \vec{AB} \rangle = k$. Alors M' est le projeté orthogonal de M sur (AB) et l'ensemble est la perpendiculaire à (AB) passant par M' .

- Si $k = 0$, $M' = I$.
- Si $k > 0$, $M' \in [IB)$, $IM' = \frac{k}{2AB}$.
- Si $k < 0$, $M' \in [IA)$, $IM' = \frac{k}{2AB}$.

3.2 Théorème d'Al-Kashi

Théorème:

Soit ABC un triangle quelconque. On note : $\begin{cases} a = BC & b = CA & c = AB \\ \hat{A} = \widehat{BAC} & \hat{B} = \widehat{ABC} & \hat{C} = \widehat{BCA} \end{cases}$

$$\text{Alors : } \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A}) \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos(\hat{B}) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C}) \end{cases}$$

Démonstration:

En effet :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{BA}\|^2 + 2 \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC} \rangle + \|\overrightarrow{AC}\|^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + CA^2 - 2 \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$$

$$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + CA^2 - 2 \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$$

Exemple:

- Dans un triangle KLM , on a $KL = 5$, $KM = 2\sqrt{2}$ et $\widehat{MKL} = 45^\circ$. On calcule LM par :
 $LM^2 = KL^2 + KM^2 - 2 \times KL \times KM \times \cos(\widehat{MKL})$.
A partir de là il est possible de déterminer la mesure de l'angle $\widehat{LMK}$.
- Dans un triangle ABC , on a $AB = 6$, $BC = 14$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Déterminer AC .

4 Exercice bilan

- Soit un rectangle $ABCD$ de longueur 6 et de largeur 4. Calculer

a. $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$

b. $\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \rangle$

- Déterminer la valeur de m tel que $\vec{u} = \begin{pmatrix} m-8 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2m-7 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
- Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 4$ et $\hat{C} = 45^\circ$. Déterminer la valeur de BC puis de $\hat{A}$ et $\hat{B}$.