

1 Géométrie repérée

1.1 Compétences Attendues

- Déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant un point et un vecteur directeur.
- Déterminer et utiliser l'équation d'un cercle donné par son centre et son rayon.
- Reconnaître une équation de cercle, déterminer centre et rayon.
- Utiliser un repère pour étudier une configuration.

1.2 Exercices

Exercice 1:

Soient les points $A(2;3)$; $B(23;6)$; $C(-10;-5)$; $D(4;-3)$; $E(8;19)$; $F(17;37)$; $G(11;25)$ et $H(-8;-14)$

1. Calculer les coordonnées de \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{AD}
2. (a) Les droites (AB) et (DC) sont-elles parallèles ?
(b) Les droites (BC) et (AD) sont-elles parallèles ?
3. (a) Les points E,F et G sont-ils alignés ?
(b) Les points E,F et H sont-ils alignés ?

Exercice 2:

On considère les points $A(3;7)$; $B(-3;3)$ et $C(7;-5)$. On considère les points :

- M,N et P les milieux respectifs de $[BC]$; $[AC]$ et $[AB]$
- S symétrique de M par rapport à B
- G et H définis par $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

1. Faire une figure
2. (a) Exprimer \overrightarrow{BM} en fonction de \overrightarrow{BC}
(b) Calculer les coordonnées du point M
(c) Calculer de la même manière les coordonnées de N et P
3. (a) Exprimer \overrightarrow{MS} en fonction de \overrightarrow{MB}
(b) Calculer les coordonnées de S

4. Calculer les coordonnées de G et H
5. Montrer que les droites (MH) et (SP) sont parallèles
6. Montrer que les points S,G et N sont alignés

Exercice 3:

Soit ABC un triangle où $A(11;2)$; $B(3;-2)$ et $C(1;6)$. M et N sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[AC]$. Soit G défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

1. (a) Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
(b) Calculer les coordonnées du point G
2. (a) A l'aide d'une égalité vectorielle, calculer les coordonnées du point M
(b) Calculer de la même manière les coordonnées de N
3. (a) Montrer que les vecteurs \overrightarrow{BG} et \overrightarrow{BN} sont colinéaires. Que peut-on déduire ?
(b) Montrer que les points C,G et M sont alignés
4. Que représente le point G pour le triangle ABC ?

Exercice 4:

Soit ABC un triangle du plan. On se place dans le repère (A, B, C) .

1. On note A' le milieu de $[BC]$, B' le milieu de $[AC]$ et C' le milieu de $[AB]$.
(a) Calculer les coordonnées des points A' , B' et C' dans le repère (A, B, C)
(b) En utilisant le quadrillage, placer ces trois points.
2. (a) Calculer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$
(b) Que dire des points A,G et A' ?
(c) Démontrer que les points B,G et B' sont alignés.
(d) Démontrer que les points C,G et C' sont alignés.
(e) Construire alors le point G
3. On considère les points I et J tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$
(a) Calculer les coordonnées du point I dans le repère (A, B, C)
(b) Calculer les coordonnées du point J dans le repère (A, B, C)
(c) En utilisant le quadrillage, placer les points I et J.

4. Les droites (IJ) et (BC) sont-elles parallèles ?

Exercice 5:

- Proposer un algorithme vérifiant si les droites (AB) et (CD) sont parallèles à partir des coordonnées des points A, B, C et D entrées par l'utilisateur.
- Proposer un algorithme qui vérifie si les points A, B et C sont alignés à partir de leurs coordonnées entrées par l'utilisateur.

Exercice 6:

On considère deux points A et B dans le plan et le point R tel que : $2\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{AB}$.

- Exprimer le vecteur \overrightarrow{AR} en fonction de \overrightarrow{AB} .
- Que peut-on en déduire concernant les points A, B et R ?

Exercice 7:

On considère un triangle quelconque ABC .

- Faire une figure.
- On considère le point M tel que : $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
 - En utilisant la relation de Chasles, exprimer le vecteur \overrightarrow{AM} à l'aide de vecteurs formés des points A, B et C uniquement.
 - Que peut-on dire des points A, C et M ?
 - Placer le point M sur la figure.

Exercice 8:

ABC est un triangle. D est le point tel que : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$. Sans faire de figure, démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 9:

Soient A, B et C trois points non alignés du plan. M est le point tel que : $2\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{CA}$.

- Montrer que \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{BC} sont colinéaires.
- Que peut-on en déduire concernant le quadrilatère $AMBC$?

Exercice 10:

$ABCD$ est un rectangle, I et J sont les milieux respectifs de $[BC]$ et $[DC]$ et O est le centre du rectangle.

- Faire une figure.
- Ecrire les vecteurs $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AJ}$ et \overrightarrow{AO} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} .
- Même question avec les vecteurs $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{BJ}$ et \overrightarrow{IJ} .

Exercice 11:

$ABCD$ est un parallélogramme, F est le point tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et E tel que $\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.

- Montrer que $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$.
- Décomposer le vecteur \overrightarrow{BD} selon \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} .
- Démontrer que (EF) et (BD) sont parallèles.

Exercice 12:

Dans un parallélogramme $ABCD$, on considère les points M, N et P tels que : $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. Montrer que les droites (DM) et (NP) sont parallèles.

Exercice 13:

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points A et B . Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) dans chacun des cas suivants.

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1. Avec $A(5; 3)$ et $B(4; 4)$. | 3. Avec $A(-1; 0)$ et $B(-5; 4)$. |
| 2. Avec $A(-2; 1)$ et $B(-1; 3)$. | 4. Avec $A(-2; -5)$ et $B(0; 2)$. |

Exercice 14:

- Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite (d) qui passe par le point A de coordonnées $(1; 3)$ et qui a le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) .
- Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite (d) qui passe par le point A de coordonnées $(5; 5)$ et qui a le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) .

3. Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite (d) qui passe par le point A de coordonnées $(0; -4)$ et qui a le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) .

4. Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite (d) qui passe par le point A de coordonnées $(4; -2)$ et qui a le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) .

Exercice 15:

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on considère les droites d et d' d'équation respective $2x + y + 3 = 0$ et $3x - y + 1 = 0$.

- (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de d avec les axes du repère.
(b) Tracer la droite d .
- (a) Trouver deux points à coordonnées entières qui appartiennent à d' .
(b) Tracer la droite d' dans le repère précédent.

Exercice 16:

On considère un paramètre $m \in \mathbb{R}$.

- Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et d la droite d'équations $2x - 5y + 2 = 0$. Trouver les éventuelles valeurs de m telles que $A \in d$.

$$\begin{array}{l|l} \text{(a) } A(m; -\frac{1}{3}) & \text{(c) } A(5m; 2m + 1) \\ \text{(b) } A(0; m^2) & \text{(d) } A(m^2 - 1; m) \end{array}$$

- Reprendre la question précédente avec la droite d' d'équation $4x + 3y + 5 = 0$

Exercice 17:

Dans chacun des cas suivants :

- Déterminer l'équation réduite de la droite d parallèle à d' et passant par A
- Tracer d

1. $A(2; 3)$ et $d' : y = -2x - 1$

2. $A(-3; 4)$ et $d' : y = \frac{1}{4}x + 1$

Exercice 18:

Déterminer si les droites (d) et (d') , dont on donne, ci-dessous, des équations cartésiennes, sont parallèles, confondues ou sécantes.

1. On donne : $(d) : -7x - 6y + 5 = 0$ et $(d') : 28x + 24y + 5 = 0$

2. On donne : $(d) : 5x - y - 2 = 0$ et $(d') : -2x - 2y - 4 = 0$

3. On donne : $(d) : 7x + 7y - 7 = 0$ et $(d') : 4x + y + 6 = 0$

Exercice 19:

Déterminer si le couple proposé est solution du système d'équations.

1. Le couple $(-8; -9)$ est-il solution du système $\begin{cases} x - 3y = 21 \\ 4x + 4y = -76 \end{cases} ?$

2. Le couple $(-8; 2)$ est-il solution du système $\begin{cases} 5x - 5y = -50 \\ 6x + 2y = -44 \end{cases} ?$

Exercice 20:

Résoudre les systèmes d'équations suivants puis interpréter géométriquement.

1. $\begin{cases} -6x + y = 56 \\ 4x + 4y = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 22x + 7y + 6 = 19x + 5y + 4 \\ 5x - 5y + 5 = 7x - 12 \end{cases}$

Exercice 21:

Résoudre les problèmes suivants :

- Le périmètre d'un terrain rectangulaire vaut 118 m. Si on augmente la largeur d'un terrain rectangulaire de 10 m et on diminue la longueur de 10 m, l'aire du terrain augmente de 190 m². Déterminer les mesures du terrain ?
- On doit répartir des élèves dans des groupes pour une excursion. Si on met 155 élèves par groupe, alors on a besoin de 5 groupes de moins que si on met 62 élèves par groupe. Combien d'élèves y a-t-il ?

Exercice 22:

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-3; 5), B(9; 2)$ et $C(2; 0)$.

- Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) .

- Montrer que C n'appartient pas à la droite (AB) .
- Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par C et de coefficient directeur $\frac{7}{2}$.
- Déterminer les coordonnées du point d'intersection M de cette droite d avec la droite (AB) .
- Déterminer l'abscisse du point d'intersection P de la droite (AB) avec l'axe des abscisses.

Exercice 23:

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et d_1, d_2 et d_3 des droites d'équation respective :

- $d_1 : 2x + y + 4 = 0$
- $d_2 : -x + 2y - 5 = 0$
- $d_3 : 3x - y + 9 = 0$

- (a) Démontrer que d_1 et d_2 sont sécantes.
(b) Déterminer les coordonnées de A , point d'intersection de d_1 et d_2 .
- Montrer que d_1, d_2 et d_3 sont concourantes.

Exercice 24:

Soit $m, x, y \in \mathbb{R}$. On considère la famille de droites \mathcal{D}_m d'équation :
 $x + (m - 1)y - m = 0$.

- Tracer dans un repère les droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et \mathcal{D}_{-1} .
- Démontrer que pour tout réel m , la droite \mathcal{D}_m passe par un point A dont on donnera les coordonnées.
- (a) Peut-on trouver m tel que la droite \mathcal{D}_m passe par le point $B(3; 0)$?
(b) Peut-on trouver m tel que la droite \mathcal{D}_m soit parallèle à l'axe des ordonnées ?
(c) Peut-on trouver m tel que la droite \mathcal{D}_m soit parallèle à l'axe des abscisses ?

Exercice 25:

Le cercle \mathcal{C} a pour diamètre $[OA]$ et soit $A(3; 7)$.

- Déterminer une équation de \mathcal{C} .
- Déterminer l'abscisse de l'autre point d'intersection du cercle avec l'axe des abscisses.

Exercice 26:

Une équation d'un cercle \mathcal{C} est donnée pour tout $x, y \in \mathbb{R}, (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

- Donner les coordonnées du centre de \mathcal{C} et son rayon.
- Montrer que le point $A(4; 2)$ appartient à \mathcal{C} .

Exercice 27:

Le cercle \mathcal{C} a pour centre $A(-3; -2)$ et passe par la point $C(6; -5)$.

- Déterminer une équation du cercle \mathcal{C} .
- Calculer les coordonnées des points d'intersection du cercle \mathcal{C} et de l'axe des ordonnées.

1.3 Algorithmes et Python**Exercice 28:**

Un ensemble (E) de points de coordonnées $(x; y)$ est défini par l'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{N}$.

- Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie la nature de l'ensemble (E) :

```

1 import math
2
3 def ensemble(a, b, c):
4     d = ... **2 + ... **2 - 4 * ...
5     if d > 0:
6         return "... "
7     if d == 0:
8         return "... "
9     if d < 0:
10        return "... "
```

- Programmer cette fonction et la tester pour l'ensemble (E) défini par l'équation :
 - $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 25 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 37 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 4x - 14y + 53 = 0$
- Remplacer la chaîne de caractères renvoyée par la fonction par une liste contenant la nature de l'ensemble, éventuellement accompagnée de ses caractéristiques (coordonnées, rayon, etc...)

1.4 Approfondissements

Exercice 29:

Dans un repère orthonormé du plan, dont l'unité est le kilomètre, un navire suit une route représentée par une droite dont une équation est $x = 0$. Il avance à une vitesse de 25km/h . Un phare situé au point de coordonnées $(-6; -2)$ peut être aperçu de n'importe quel endroit dans un rayon de 10km . Déterminer le temps pendant lequel le bateau pourra visualiser la lumière du phare.