1 Fonctions polynômiales de degré 2

1.1 Compétences Attendues

- Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée.
- Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts.
- Factoriser une fonction polynôme du second degré, en diversifiant les stratégies : racine évidente, détection des racines par leur somme et leur produit, identité remarquable, application des formules générales.
- Choisir une forme adaptée (développée réduite, canonique, factorisée) d'une fonction polynôme du second degré dans le cadre de la résolution d'un problème (équation, inéquation, optimisation, variations).

1.2 Exercices

Exercice 1:
Préciser si la fonction définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction polynômiale de degré 2. Le cas échéant, identifier les nombres réels a, b et c dans l'expression $ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$.

1. $f : x \mapsto 3x(x + 2) - 5x$
2. $g : x \mapsto (2x + 1)^2 - 4x^2$
3. $h : x \mapsto (x - 2)^2 - (x + 2)^2$
4. $k : x \mapsto 5(x^2 - 3)$

Exercice 2:
Ecrire chaque fonction sous forme canonique puis dresser son tableau de variations.

1. $f : x \mapsto x^2 + 4x + 1$
2. $g : x \mapsto -x^2 + 2x + 2$
3. $h : x \mapsto 0,5x^2 + x - 4$
4. $k : x \mapsto 2,5x^2 + 20x + 35$

Exercice 3:

1. Soit $g : x \mapsto 4x^2 - 12x$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $4(x - 1,5)^2 - 9$ est l'expression sous forme canonique de $g(x)$. En déduire le tableau de variations de g.
2. Soit $f : x \mapsto -2x^2 - \frac{16}{3}x - \frac{25}{9}$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-2(x + \frac{4}{3})^2 + \frac{7}{9}$ est l'expression sous forme canonique de $f(x)$. En déduire le tableau de variations de f.

Exercice 4:
Résoudre pour tout $x \in \mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2 + 2x + 2 = 0$
2. $1 - x^2 + 13x + 2 = 0$
3. $x^2 - x - 1 = 0$
4. $-5x^2 + 8x - 3,25 = 0$
5. $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$
6. $-3x^2 + 8x = 5$

Exercice 5:
Soient $x \in \mathbb{R}$ et un rectangle $ABCD$ de périmètre 10 cm tel que $AB = x$ cm .

1. Exprimer BC en fonction de x.
2. Montrer que l'aire du rectangle $ABCD$ (en cm^2) est donnée par $S(x) = -(x - 2,5)^2 + 6,25$ pour tout $x \in [0; 5]$.
3. Dresser le tableau de variation de S sur $[0; 5]$. Que peut-on remarquer lorsque l'aire de $ABCD$ est maximale ?

Exercice 6:
Soit $x \in [60; 180]$ la masse (en kg) d'engrais répandue à l'hectare, la quantité de sucre $q(x)$ (en kg) présente dans 100 kg de betteraves sucrières est donnée par $q(x) = -0,004x^2 + x - 40$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [60; 180]$: $q(x) = -0,004(x - 125)^2 + 22,5$
2. En déduire, à l'aide du tableau de variation de q, la masse x d'engrais répandue à l'hectare pour que la quantité de sucre soit maximale.

Exercice 7:
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer ses racines éventuelles et une forme factorisée la cas échéant.

1. $f : x \mapsto -4x^2 - 10x + 6$
2. $g : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$
3. $h : x \mapsto 4x^2 + x + 9$
4. $k : x \mapsto 4x^2 + 13x + 9$
5. $\psi : x \mapsto x^2 - 2x + 1$
6. $\phi : x \mapsto -3x^2 + 2x - 5$

Exercice 8:
Soit $x \in \mathbb{R}$, résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$ en précisant les valeurs interdites le cas échéant.

1. $(3x^2+5x-8)(9x^2-6x+1)=0$
2. $5x^3+4x^2-x=0$
3. $x-3=\dfrac{2}{x}$
4. $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=0$
5. $\dfrac{5x^2-11x+2}{x-2}=0$

Exercice 9:
Une étude de marché a été réalisée sur la vente de clefs USB de 8 Go dans les magasins d'une chaîne d'hypermarchés. On estime que le prix de vente p d'une clef USB est compris entre 2 et 5 euros. D'après l'étude, la demande, c'est-à-dire la quantité de clefs USB (en milliers) réclamée par les consommateurs est égale à $D(p)=0,4p^2-4p+11,5$. L'offre, c'est-à-dire la quantité de clefs USB (en milliers) disponible chez les fournisseurs est égale à $F(p)=-0,3p^2+4,05p-6,35$.
On appelle "prix d'équilibre" la valeur de p pour laquelle la demande est égale à l'offre.

1. Déterminer le prix d'équilibre.
2. Quels conseils pourrait-on donner au gestionnaire du stock de cette chaîne d'hypermarchés ?

Exercice 10:

1. Trouver deux nombres réels ayant pour somme 5 et pour produit 2.
2. Quelles sont les dimension d'un rectangle de périmètre 50cm et d'aire 114cm^2 ?

Exercice 11:
Soit $x \in \mathbb{R}$, résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $-4x^2-11x+3 \geq 0$
2. $-3x^2+2x-6<0$
3. $3x^2-24x+48 \geq 0$
4. $5x^2-3x-1>0$
5. $4x^2-7 \leq 0$
6. $3x^2-5x<4x+5$

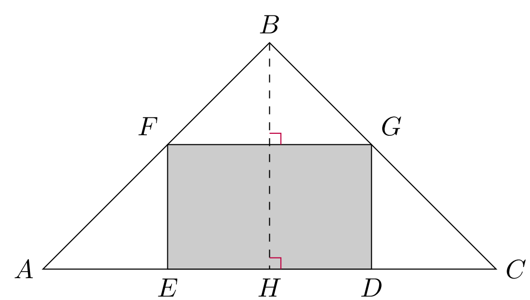
Exercice 12:
Soit $x \in \mathbb{R}$, résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$ en précisant les valeurs interdites le cas échéant.

1. $(x+3)(2x^2-10x+12)>0$
2. $(x^2-3)(-6x^2+7x-1) \leq 0$
3. $3x+2<\dfrac{5}{x}$
4. $\dfrac{x^2-x-6}{-4x^2-6x+4}>0$
5. $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{4}{5x-2}>0$

Exercice 13:
Afin d'étudier la trajectoire d'un ballon de rugby, on réalise une chronophotographie de son mouvement en le lançant à partir d'une hauteur de $1m$.
Si x désigne l'abscisse du ballon (en m) au moment où il quitte la main de la joueuse (d'abscisse 0), alors la hauteur (en m) atteinte par le ballon à l'abscisse x est modélisée par $h(x)=-0,129x^2+1,26x+1$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $h(x)=0$. Que peut-on en déduire pour le ballon ?
2. Le ballon peut-il dépasse une hauteur de $5m$? Justifier la réponse.
3. On souhaite calculer la distance sur laquelle la hauteur du ballon dépasse $3m$.
   (a) Résoudre pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation $-0,129x^2+1,26x-2>0$.
   (b) Conclure.
4. (a) Résoudre pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation $h(x)>4,1$.
   (b) Que peut-on conclure sur la hauteur du ballon ?

Exercice 14:
ABC est un triangle tel que $AC=12$. H est le pied de la hauteur issue de B avec $AH=8$ et $BH=6$. On place les points D, E, F et G comme la figure ci-dessous pour que $DEFG$ soit rectangle. On pose $x=AE$.



1. A quel intervalle appartient le réel x ?
2. Exprimer les longueurs EF et DC en fonction de x puis en déduire l'aire du rectangle $DEFG$, notée $S(x)$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction S sur son intervalle de définition puis déterminer les éventuelles valeurs de x qui rendent l'aire du rectangle $DEFG$ maximale.

Exercice 15:

ABC est un triangle équilatéral de côté $10cm$ et M est un point du segment $[AB]$ tel que $AM = x$. N est le point du segment $[AC]$ tel que $AM = AN$. H est le pied de la hauteur issue de N dans le triangle ABN. On souhaite déterminer la position du point M sur $[AB]$ pour que la distance BN soit minimale.

1. Faire une figure.
2. Démontrer que AMN est un triangle équilatéral.
3. Montrer alors que H est le milieu du segment $[AM]$.
4. A l'aide du théorème de Pythagore, démontrer que : $HN = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.
5. Démontrer que, pour tout $x \in [0; 10]$: $BN^2 = x^2 - 10x + 100$.
6. Répondre alors au problème posé.

Exercice 16:

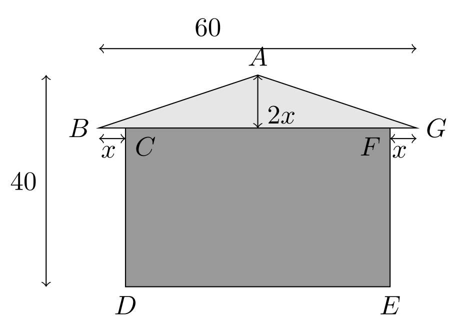
Soit $x, m \in \mathbb{R}$, on considère l'équation : $(m-2)x^2 + 2mx - 1 = 0$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation lorsque $m = 2$.
2. En supposant que $m \neq 2$, déterminer les éventuelles valeurs de m pour lesquelles :
   (a) L'équation admet une unique solution réelle.
   (b) L'équation admet deux solutions réelles.

Exercice 17:

Une société sponsorise une course automobile et appose son logo, dessiné ci-dessous, sur les portières des véhicules engagés.

Pour limiter les coûts, l'entreprise souhaite minimiser l'aire du logo. Déterminer la valeur de x qui permet de minimiser l'aire du logo.



Exercice 18:

Un restaurant propose une formule "midi" à 8 euros. Son comptable a montré que pour x formules "midi" vendues ($x \in [0; 100]$), le coût de revient $C(x)$ (en euros) est donné par $C(x) = 0,25x^2 - 12x + 200$.

1. (a) Exprimer la recette totale $R(x)$ pour x formules "midi" vendues.
   (b) Montrer que l'expression du bénéfice $B(x)$ pour x formules "midi" vendues ($x \in [0; 100]$) est $B(x) = -0,25x^2 + 20x - 200$.
2. (a) Dresser le tableau de variations de B sur l'intervalle $[0; 100]$.
   (b) Pour quelle valeur de x le bénéficé est-il maximal ? Quel est ce bénéfice maximal ?
3. Déterminer combien de formules doivent être vendues pour que le bénéfice soit positif.

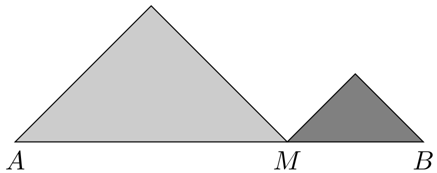
Exercice 19:

Une entreprise fabrique des composants électroniques. Sa production mensuelles est inférieure à 12000 articles. Le coût total mensuel, en milliers d'euros, pour produire x milliers d'articles est modélisé par la fonction C définie sur $[0; 12]$ par $C(x) = 0,6x^2 - 0,62x + 18,24$. Chaque article est vendu au prix unitaire de 7 euros.

1. L'entreprise a produit et vendu 4000 articles en mai 2024 et 6500 articles en juin 2024. Le bénéfice a-t-il été plus important au mois de juin ?
2. On note $R(x)$, le montant, en milliers d'euros, de la recette mensuelle pour x milliers d'articles vendus. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
3. On note $B(x)$ le bénéfice mensuel, en milliers d'euros, réalisé lorsque l'enteprise produit et vend x milliers d'articles.
   (a) Vérifier que, pour tout $x \in [0; 12]$: $B(x) = -0,6x^2 + 7,62x - 18,24$.
   (b) Etudier le signe de $B(x)$ en fonction de $x \in [0; 12]$ et les variations de B sur $[0; 12]$.
4. En déduire le nombre d'articles que l'entreprise doit produire pour réaliser un bénéfice mensuel :
   (a) positif.
   (b) maximal.

Exercice 20:

Un segment $[AB]$ a pour longueur $12cm$. M est un point du segment $[AB]$ tel que $AM = x$ (en cm). On forme sur les segments $[AM]$ et $[MB]$ deux triangles équilatéraux.
Pour quelle valeur de x la somme des aires (en cm^2) de ces triangles est-elle minimale ?



Exercice 21:
$AEDC$ est un rectangle tel que $AC = 7$ et $AE = 2$. B est un point de $[AC]$ tel que $AB = 5$. P est un point de $[ED]$ tel que $EP = x$. On note $f(x) = PA^2 + PB^2 + PC^2$. Démontrer que f admet un minimum, puis déterminer la valeur de ce minimum ainsi que la valeur de x pour laquelle il est atteint.

Exercice 22:
Déterminer le périmètre d'un triangle rectangle connaissant son aire $\mathcal{A} = 2340$ et la longueur de son hypothénuse $h = 97$.

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 23:

1. Tom a écrit la fonction en Python ci-dessous. A quoi correspond la valeur renvoyée par `equation(2,5,1)`?

```
def equation(a,b,c):
    delta = b**2-4*a*c
    if delta>0:
        return 2
    elif delta==0:
        return 1
    else :
        return 0
```

2. Proposer une fonction en Python qui fait appel à la fonction rédigée par Tom et qui permet de calculer les éventuelles racines réelles d'un polynômes du second degrés à coefficients entiers.

1.4 Approfondissements

Exercice 24:
Soit $a, x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que $x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1})$.
2. En posant $u = \dfrac{x}{a}$, vérifier que $x^n - a^n = a^n(u^n - 1)$.
3. Démontrer donc que:
$x^n - a^n = (x-a)(a^{n-1} + a^{n-1}x + a^{n-2}x^2 + ... + ax^{n-2} + x^{n-1})$.