1 Suites numériques

1.1 Compétences Attendues

- Dans le cadre de l'étude d'une suite, utiliser le registre de la langue naturelle, le registre algébrique, le registre graphique, et passer de l'un à l'autre.
- Proposer, modéliser une situation permettant de générer une suite de nombres. Déterminer une relation explicite ou une relation de récurrence pour une suite définie par un motif géométrique, par une question de dénombrement.
- Calculer des termes d'une suite définie explicitement, par récurrence ou par un algorithme.

1.2 Exercices

Exercice 1:
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une relation de la forme $u_n = f(n)$ pour une certaine fonction f. Déterminer u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4. Arrondir éventuellement à 10^{-2}.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 - 3n$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (1,02)^n$
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (0,2)^n$
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -\dfrac{1}{n+1}$

Exercice 2:
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une relation de la forme $u_n = f(n)$ pour une certaine fonction f. Déterminer u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4. Arrondir éventuellement à 10^{-2}.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4 - 2n$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (3,11)^n$
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 100(0,9)^n$
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{4}{n+2}$

Exercice 3:

1. $u_n = \dfrac{-n-4}{3n+6}$.
   Calculer u_5.
2. $u_n = -9n - 7$.
   Calculer u_6.
3. $u_n = \dfrac{-5n-3}{3n+7}$.
   Calculer u_8.

Exercice 4:

1. $u_n = 3n + 3$.
   Calculer u_6.
2. $u_n = 2n^2 - 7n - 9$.
   Calculer u_2.
3. $u_n = 2n^2 + n + 3$.
   Calculer u_4.

Exercice 5:

1. $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = v_n - 12$.
   Calculer v_1.
2. $v_0 = -3$ et $v_{n+1} = v_n + 2$.
   Calculer v_1.
3. $w_0 = -5$ et $w_{n+1} = -2w_n$.
   Calculer w_1.
4. $w_0 = 6$ et $w_{n+1} = -3w_n$.
   Calculer w_1.

Exercice 6:

1. $w_0 = -4$ et $w_{n+1} = 5 - w_n^2$.
   Calculer w_1.
2. $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = -2 - u_n^2$.
   Calculer u_1.
3. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 4u_n - 6n$.
   Calculer u_1.
4. $v_0 = -2$ et $v_{n+1} = -2v_n + 5n$.
   Calculer v_1.

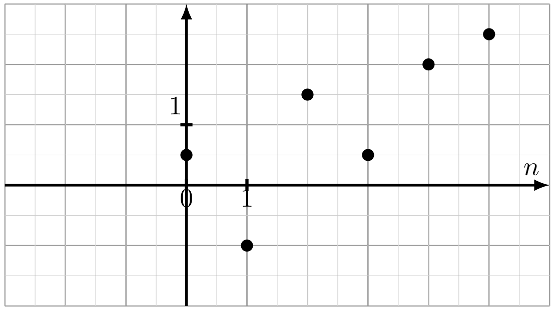
Exercice 7:

1. $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = v_n - 1$.
   Calculer v_3.
2. $w_0 = 3$ et $w_{n+1} = -3 - w_n^2$.
   Calculer w_4.
3. $v_0 = -1$ et $v_{n+1} = -3v_n + 3$.
   Calculer v_3.
4. $v_0 = -4$ et $v_{n+1} = v_n + 9$.
   Calculer v_3.

Exercice 8:

1. $w_0 = -1$ et $w_{n+1} = -5w_n$.
   Calculer w_2.
2. $v_0 = 10$ et $v_{n+1} = -2v_n + n$.
   Calculer v_5.
3. $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = 3v_n + 4$.
   Calculer v_5.
4. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - 9n$.
   Calculer u_2.

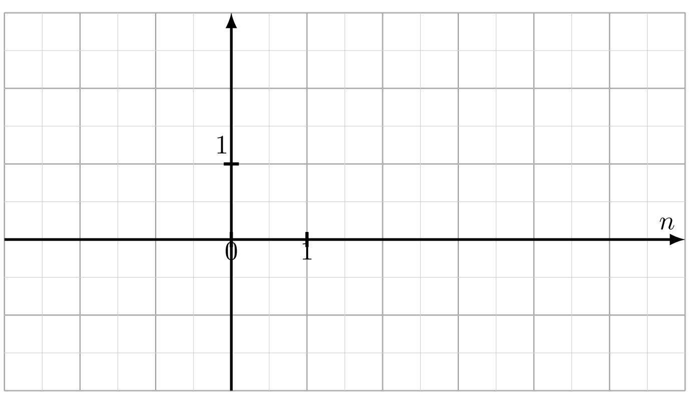
Exercice 9:
Le graphique ci-dessous donne les six premiers points de la représentation graphique d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



1. Déterminer graphiquement u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 et u_5
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle strictement croissante sur $\mathbb{N}$? strictement décroissante sur $\mathbb{N}$? Ni strictement croissante, ni strictement décroissante ?

Exercice 10:

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n = 0,1n^2 - 4$. Calculer u_8
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{5}{3n-1}$. Calculer v_3
3. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par son premeir terme $w_0 = 1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $w_{n+1} = -2w_n + 5$.
   (a) Calculer w_1 et w_2
   (b) Représenter graphiquement dans le repère ci-dessous la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$



Exercice 11:
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n + 1$

1. Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4
2. Représenter graphiquement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide des valeurs ci-dessus.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle croissante, décroissante ou ni l'un ni l'autre ?

Exercice 12:
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -2n + 7$ et $v_n = 2^n$.

1. Exprimer u_{n+1} puis v_{n+1} en fonction de n
2. Calculer $u_{n+1} - u_n$ puis $v_{n+1} - v_n$. Que peut-on en déduire sur la croissance/décroissance des suites ?

Exercice 13:
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2,2$ et pour tout entier $n, u_{n+1} = -u_n + u_n$. On admet que pour tout $n, u_n > 2$.

1. Démontrer que pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.
2. Conclure sur la monotonie de (u_n).

Exercice 14:
Les suites (w_n) et (t_n) sont définies pour tout entier naturel n par $w_n = 7n$ et $t_n = 3^n$.

1. Etablir le sens de variation des suites (w_n) et (t_n).
2. Prouver que la suite $(w_n - t_n)$ est strictement décroissante à partir de l'indice 2.

Exercice 15:
On considère la suite (u_n) telle que, pour tout entier $n, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2+u_n^3}$. On admet que pour tout entier $n, u_n > 0$.

1. Vérifier que pour tout entier $n, u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^4}{2+u_n^3}$.
2. En déduire la monotonie de (u_n).

Exercice 16:
Dans une agence de France Travail, au 1er janvier 2024, il y a 480 demandeurs d'emploi. Les statistiques ont permis au directeur d'agence de prévoir que chaque trimestre, 125 personnes viennent s'inscrire et 38% retrouvent un emploi.
Le nombre de demandeurs d'emploi est modélisé à l'aide d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où u_n représente le nombre de demandeurs d'emploi au début de n-ième trimestre après le 1 janvier 2024.

1. Calculer u_1.
2. Calculer le nombre de demandeurs d'emploi au début du 2ème puis du 3ème trimestre 2024.
3. Justifier que la situation précédente peut être modélisée par $u_{n+1} = 0,62u_n + 125$.
4. Combien de demandeurs d'emploi peut-on estimer le 1er janvier 2026 ?
5. Le directeur de l'agence souhaite que le nombre de demandeurs d'emploi diminue de 30% par rapport au premier trimestre 2024. Pourra-t-il atteindre son objectif ? Si oui, à quelle date ?

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 17:
Ecrire une fonction Python de paramètre n et qui renvoie la valeur de $u_n = \dfrac{n^3 - 5}{5n + 3}$.

Exercice 18:
Pour calculer un terme de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ on utilise la fonction Python ci-dessous.

```
def V(n):
    t=n*n+5
    t=t/(2**n)
    return t
```

1. Calculer v_0, v_1 et v_2.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire une autre écriture de cette fonction en Python utilisant une seule affectation.

Exercice 19:
Pour calculer un terme de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$, on utilise la fonction Python ci-dessous.

```
def V(n):
    t=4
    for k in range(n):
        t=2*t-5
    return t
```

1. Quelle est la valeur de v_0?
2. Proposer une forme récurrente de la suite (v_n).
3. Déterminer la valeur de v_3.

1.4 Approfondissements

Exercice 20:
Pour chacune des suites (S_n) suivantes :

- Donner la valeur de S_1.
- Ecrire la relation de récurrence entre S_n et S_{n+1}.
- Déterminer la monotonie de (S_n).

1. $\forall n \in {}^*, S_n = 2 + 4 + 6 + ... + 2n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$.

Exercice 21:
Pour tout nombre entier $n \geq 1$ on pose $s_n = \dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

1. Calculer s_1, s_2 et s_3.
2. Démontrer que la suite (s_n) est croissante sur $\mathbb{N}^*$.
3. Pour tout $k \geq 1$, justifier que $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.
4. En déduire une expression simple de s_n.