

1 Fonctions trigonométriques

1.1 Compétences Attendues

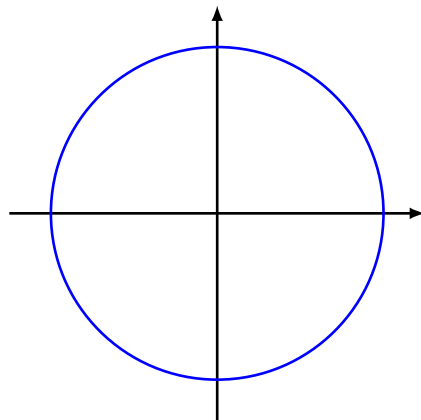
- Placer un point sur le cercle trigonométrique.
- Lier la représentation graphique des fonctions cosinus et sinus et le cercle trigonométrique.
- Traduire graphiquement la parité et la périodicité des fonctions trigonométriques.
- Par lecture du cercle trigonométrique, déterminer, pour des valeurs remarquables de x , les cosinus et sinus d'angles associés à x .

1.2 Exercices

Exercice 1:

Placer sur le cercle trigonométrique les points $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ et J associés respectivement, par enroulement de la droite numérique, aux nombres réels suivants :

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| 1. 13π | 6. $\frac{101\pi}{2}$ |
| 2. $\frac{3\pi}{5}$ | 7. $\frac{37\pi}{2}$ |
| 3. $-\frac{11\pi}{4}$ | 8. $-\frac{7\pi}{6}$ |
| 4. -26π | 9. $\frac{28\pi}{3}$ |
| 5. $-\frac{16\pi}{3}$ | 10. $-\frac{15\pi}{7}$ |



Exercice 2:

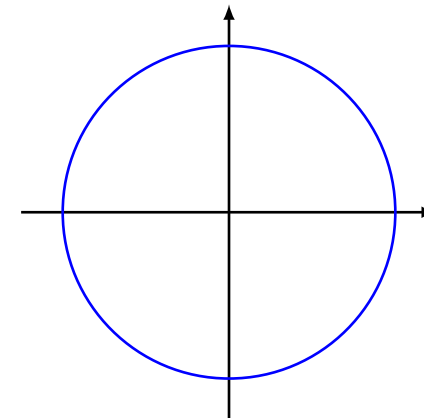
Un fil est enroulé autour d'une bobine de 1cm de rayon. La longueur du fil est $\frac{2019\pi}{2}\text{cm}$.

1. Combien a-t-on fait de tours entiers de fil sur la bobine ?
2. Quelles positions ont les deux extrémités du fil sur la face circulaire vue en coupe ? Faire une figure.

Exercice 3:

Placer sur le cercle trigonométrique les points $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ et J associés respectivement, par enroulement de la droite numérique, aux nombres réels suivants :

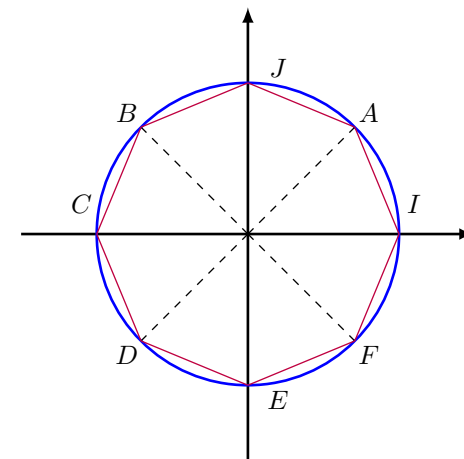
- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1. $\frac{50\pi}{3}$ | 5. $\frac{25\pi}{2}$ |
| 2. $\frac{19\pi}{6}$ | 6. $-\frac{43\pi}{3}$ |
| 3. $-\frac{25\pi}{4}$ | 7. $\frac{2\pi}{15}$ |
| 4. 151π | 8. $-\frac{7\pi}{10}$ |



Exercice 4:

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

1. $IAJBCDEF$ est un octogone régulier de centre O . Donner un nombre $[0; 2\pi[$ associé à chacun des sommets de cet octogone.
2. Donner de même un nombre réel associé à chacun des sommets d'un hexagone régulier $IGHKLM$ de centre O inscrit dans le cercle trigonométrique.

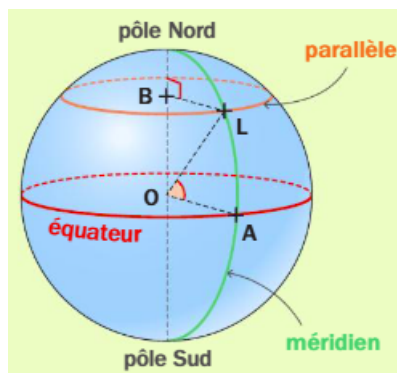


Exercice 5:

On assimile à la Terre à une sphère de centre O et de rayon 6371km .

Rappel:

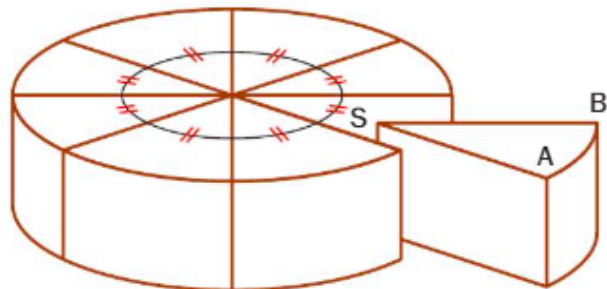
L'équateur et les méridiens sont des grands cercles de la sphère terrestre. Un parallèle est un cercle de la sphère terrestre parallèle à l'équateur



1. Calculer la longueur, arrondie au km , de l'équateur. En déduire la longueur d'un méridien terrestre.
2. Le point L représente la ville de Londres située sur le 50° parallèle Nord. En déduire, au degré près, la latitude de Londres, c'est-à-dire la mesure de l'angle $\widehat{LOA}$, suivie de l'indication Nord ou Sud.
3. Calculer la plus courte distance, arrondie au km , sur la sphère terrestre entre Londres et l'équateur.

Exercice 6:

Un pâtissier à l'habitude de confectionner un gâteau de forme cylindrique de rayon 10cm et de hauteur 6cm . Ce gâteau, prévu pour huit personnes, peut-être découpé en huit parts égales.



1. (a) Calculer la mesure de l'angle (en degrés) du secteur circulaire ASB correspondant à une part.
(b) Calculer la valeur exacte de l'aire du secteur circulaire ASB .
2. Pour l'anniversaire d'Eloïse, ses parents commandant un gâteau pour dix personnes. Le pâtissier souhaite conserver la même forme et la même hauteur que celles du gâteau pour huit. Quel doit être le rayon du disque de base (en cm) du gâteau pour dix personnes pour qu'il puisse être partagé en dix parts égales de même volume que celles du gâteau pour huit personnes ? Arrondir le rayon au millimètre.

Exercice 7:

Sans utiliser la calculatrice et en utilisant des valeurs remarquables, déterminer les valeurs exactes du cosinus et du sinus des nombres réels suivant :

- | | | | |
|----------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|
| 1. $\frac{15\pi}{3}$ | 5. $-\frac{28\pi}{3}$ | 9. $-\frac{25\pi}{4}$ | 13. $-\frac{21\pi}{2}$ |
| 2. $-\frac{9\pi}{4}$ | 6. $\frac{2018\pi}{4}$ | 10. $-\frac{15\pi}{2}$ | 14. $\frac{1981\pi}{3}$ |
| 3. $-\frac{7\pi}{6}$ | 7. $\frac{101\pi}{6}$ | 11. $\frac{43\pi}{4}$ | |
| 4. $-\frac{5\pi}{2}$ | 8. $\frac{70\pi}{3}$ | 12. $\frac{19\pi}{6}$ | |

Exercice 8:

Calculer chaque expression, donner si nécessaire le résultat sous forme d'une fraction simplifiée.

- | | |
|---|--|
| 1. $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$ | 3. $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ |
| 2. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ | 4. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos(\pi)$ |

Exercice 9:

Dans chaque cas, déterminer le ou les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ vérifiant la condition donnée.

1. $\sin(x) = \frac{1}{2}$ et $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
2. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
3. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

4. $\cos(x) = -1$ et $x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$
5. $2\cos(x) + 1 = 0$ et $x \in [-\pi; \pi[$
6. $\cos(x) = \sin(x)$ et $x \in [-\pi; \pi[$
7. $2\cos^2(x) - 1 = 0$ et $x \in [-\pi; \pi[$

Exercice 10:

Jusqu'en 2012, le diamètre des roues des VTT Adulte était de 26 pouces. Depuis 2015, tous les constructeurs de VTT ont abandonné ce diamètre. Les vélos sont maintenant équipés de roues à 27,5 pouces ou de roues à 29 pouces. Lorsque la roue de rayon R rencontre un obstacle de hauteur h , le cycliste a un effort à produire pour franchir cet obstacle. Plus l'angle α est petite, moins l'effort est important.



1. Pour une hauteur h de 8 pouces, calculer la mesure de l'angle α (en degrés) avec chacune des trois mesures de diamètre.
2. Interpréter les résultats obtenus.

Exercice 11:

Etudier la parité et la périodicité des fonctions suivantes :

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $f : x \mapsto \cos(2x)$ | 5. $\phi : x \mapsto \cos(x)\sin(x)$ |
| 2. $g : x \mapsto 2\sin(x) - 1$ | 6. $\psi : x \mapsto \cos^2(x)$ |
| 3. $h : x \mapsto \sin(3x)$ | 7. $\rho : x \mapsto \sin^2(x)$ |
| 4. $k : x \mapsto x - \cos(x)$ | 8. $\theta : x \mapsto x + \sin(x)$ |

Exercice 12:

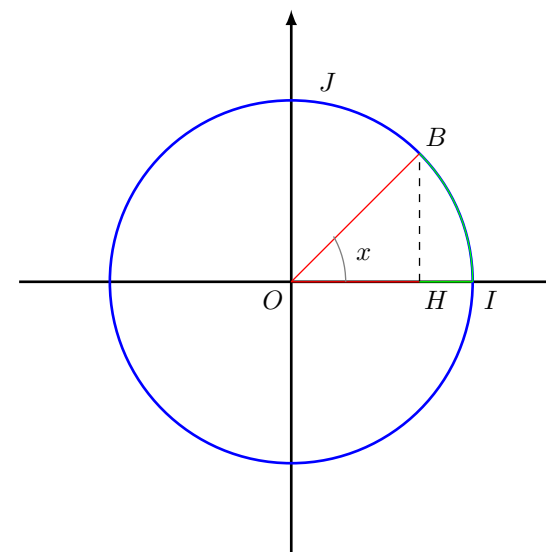
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 2\cos(x) - 1$.

1. Etudier la parité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la périodicité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre pour tout $x \in [0; \pi]$ l'équation $f(x) = 0$.
4. Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) , tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice 13:

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , on a représenté le cercle trigonométrique de centre O . B est un point du cercle trigonométrique associé à la mesure d'angle $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. H est le pied de la hauteur issue de B du triangle IOB .

1. Exprimer la longueur l_1 du chemin rouge ($BO + OH$) en fonction de x .
2. Exprimer la longueur l_2 du chemin bleu ($\widehat{BI} + IH$) en fonction de x .
3. Pour quelle valeur du nombre x la longueur du chemin rouge est-elle égale à celle du chemin bleu ? On donnera une valeur approchée de x à 10^{-2} .

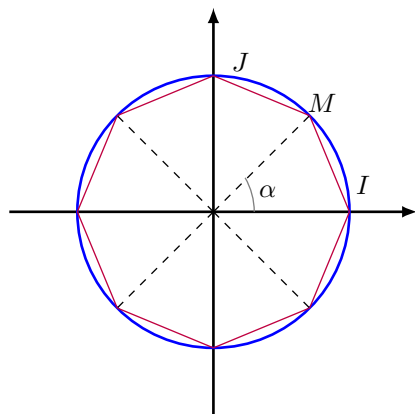


Exercice 14:

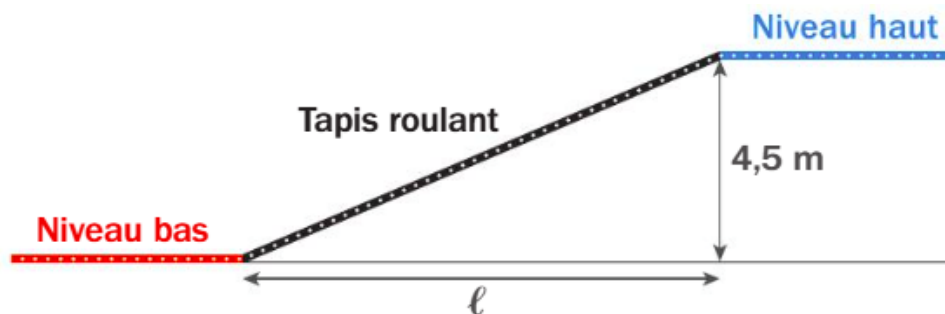
Un polygone régulier à n côtés est inscrit dans le cercle trigonométrique de centre O . La figure ci-contre représente un octogone.

1. Dans ce cas $n = 8$ et $\widehat{IOM} = \alpha = \frac{\pi}{4}$, calculer l'aire A_8 de cet octogone.
2. De façon générale, pour un polygone régulier à n côtés, on pose $\alpha = \frac{2\pi}{n}$. Démontrer que l'aire d'un polygone régulier à n côtés est égale à $A_n = \pi \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$.
3. A l'aide d'un outil numérique, représenter sur $[0; \pi]$ la fonction f définie par $f : x \mapsto \pi \frac{\sin(x)}{x}$.

4. A l'aide de la courbe représentative de f , si n devient très grand, quelle conjecture peut-on faire ? En déduire une autre conjecture géométrique concernant l'aire du polygone inscrit.

**Exercice 15:**

Dans un aéroport en construction, un architecte souhaite installer un tapis roulant pour permettre au public de passer d'un niveau à l'autre en moins d'une minute.

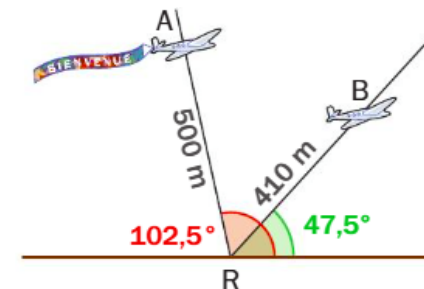


Le tapis roulant sélectionné, représenté ci-dessus, possède une vitesse de roulement de $0,8m/s$ et une pente maximale de 10%. La distance entre les deux niveaux est de $4,5m$ et on note l la longueur au sol du niveau bas occupée par le tapis roulant. Donner un encadrement de la longueur l pour que les contraintes soient satisfaites. On pourra utiliser la calculatrice.

Exercice 16:

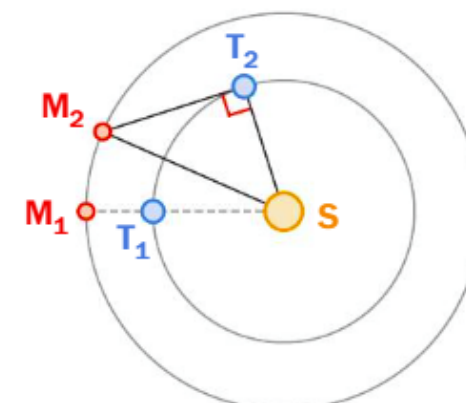
Deux petits avions A et B se déplacent en bordure d'une plage en été, l'un pour déployer un banderole publicitaire et l'autre pour photographier la plage. Dans le même plan vertical que ces deux avions, un radar R repère du sol de la plage leur position comme sur la figure ci-contre. Par arrêté municipal dans cette commune et pour des raisons de sécurité, la hauteur minimale de survol de la plage est fixée à $300m$ et la distance horizontale minimale séparant deux avions est de $500m$. Ces

deux avions respectent-ils les distances de sécurité imposées ? Justifier.

**Exercice 17:**

La planète Mars, aussi appelée la planète rouge, peut-être observée à l'oeil nu depuis la Terre. Comme la Terre, Mars tourne autour du Soleil sur une orbite quasi circulaire. Les orbites de la Terre et de Mars sont à peu près coplanaires. Les astronomes ont observé qu'à un moment précis d'une année, le Soleil, la Terre et Mars étaient en "opposition", c'est-à-dire que ces trois astres étaient alignés, avec la Terre entre Mars et le Soleil. On note T_1 et M_1 les positions respectives de la Terre et de Mars à cet instant et S la position du Soleil. Cent six jours plus tard, la Terre et Mars se sont déplacées pour atteindre les positions respectives T_2 et M_2 et sont alors en quadrature avec le Soleil, c'est-à-dire que l'angle $\widehat{M_2T_2S}$ est droit.

1. Calculer une valeur approchée au dixième de degré de la mesure de l'angle $\widehat{M_1SM_2}$, sachant que Mars tourne autour du Soleil en 687 jours.
2. Calculer une valeur approchée au dixième de degré de la mesure de l'angle $\widehat{T_1ST_2}$, puis de l'angle $\widehat{M_2ST_2}$ sachant que la Terre tourne autour du Soleil en 365 jours.
3. En déduire la distance de Mars au Soleil en fonction de celle de la Terre au Soleil.



1.3 Algorithmes et Python

Exercice 18:

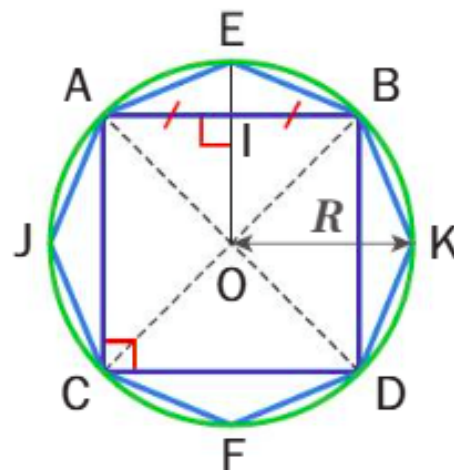
Vers 250 avant $J - C$, pour trouver une approximation de π , Archimède a encadré le périmètre d'un cercle par les périmètres de polygones réguliers de même nature inscrits et circonscrits à ce cercle.



1^{ère} méthode : avec le théorème de Pythagore

1. $ABCD$ est un carré de côté c_1 inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R comme sur la figure ci-contre.

- (a) Exprimer c_1 en fonction de R en utilisant le théorème de Pythagore.
- (b) Exprimer le périmètre p_1 de ce carré en fonction de R .
- (c) Quelle valeur de R faut-il choisir pour que p_1 soit une approximation de π ?



2. On cherche à calculer le périmètre p_2 de l'octogone $AEBKDFCJ$ de côté c_2 inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$. LA médiatrice de $[AB]$ coupe $\mathcal{C}$ en E et $[AB]$ en I . A l'aide du théorème de Pythagore, exprimer la longueur EI en fonction de AB et de R . En déduire c_2 , puis p_2 en fonction de c_1 et R .
3. (a) Ecrire un algorithme qui permet d'obtenir le côté et le périmètre d'un polygone régulier à 2^n côtés inscrit dans un cercle de rayon R .
(b) Programmer cet algorithme en Python.

- (c) Exécuter ce programme et comparer les résultats obtenus avec ceux d'Archimède qui a trouvé $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$.

2^{ème} méthode : avec la trigonométrie

On cherche à encadrer la valeur de π par le périmètre p_n d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1 et le périmètre d'un polygone P_n à n côtés circonscrit à ce cercle (n pair).

1. Sur la figure ci-dessous, $n = 6$. Calculer dans ce cas la mesure de l'angle α , en degrés, puis montrer que :
 $AB = 2 \sin(\alpha)$ et $A'B' = 2 \tan(\alpha)$. En déduire p_6 et P_6 .
2. Si on généralise à des polygones réguliers à n côtés (n pair), exprimer p_n et P_n en fonction de n .
3. Calculer les valeurs de p_n , P_n et $P_n - p_n$ pour n pair jusqu'à $n = 96$ (valeurs calculées par Archimède).
4. Que peut-on conclure au sujet de l'encadrement de π obtenu ?

