1 Dérivation

1.1 Compétences Attendues

- À partir de la définition, calculer le nombre dérivé en un point ou la fonction dérivée de la fonction carré, de la fonction inverse.
- Dans des cas simples, calculer une fonction dérivée en utilisant les propriétés des opérations sur les fonctions dérivables.
- Étudier les variations d'une fonction. Déterminer les extremums.
- Résoudre un problème d'optimisation.
- Exploiter les variations d'une fonction pour établir une inégalité. Étudier la position relative de deux courbes représentatives.
- Déterminer le sens de variation et les extremums d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
- Étudier, en lien avec la dérivation, une fonction polynôme du second degré : variations, extremum, allure selon le signe du coefficient de x^2.

1.2 Exercices

Exercice 1:
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction puis l'expression de sa fonction dérivée.

1. $f(x) = -5 - 5x$
2. $g(x) = -6 - \dfrac{3}{x}$
3. $h(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{7x}$
4. $j(x) = 5x^2 - 5x - 1$
5. $k(x) = -3x^2 - 8\sqrt{x} + 4$
6. $l(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{9} + \dfrac{5}{9}$
7. $m(x) = -5{,}6x^4 - 1{,}5x^2 - 5$
8. $o(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 9$
9. $p(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{8x}{9} + \dfrac{1}{3}$
10. $q(x) = 4{,}5x^3 - 3{,}4x^2 + 7$

Exercice 2:
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto (5x + 3)(-2x + 1)$
2. $g : x \mapsto -4x\sqrt{x}$
3. $h : x \mapsto (3x^2 - 5)(2x - 4)$
4. $\phi : x \mapsto \dfrac{1}{4 - 2x}$
5. $\psi : x \mapsto \dfrac{1}{3\sqrt{x}}$
6. $\alpha : x \mapsto \dfrac{1}{3x^2 + 2x + 4}$
7. $\beta : x \mapsto \dfrac{1}{x - 1}$
8. $v : x \mapsto \dfrac{5x + 7}{-3x + 2}$
9. $m : x \mapsto \dfrac{5x}{2x - 1}$
10. $y : x \mapsto \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

Exercice 3:
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction puis l'expression de sa fonction dérivée.

1. $f(x) = -5(5x + 7)x^2$
2. $g(x) = 9(6x - 5)x^2$
3. $h(x) = (9x + 8)x^2$
4. $h(x) = (4x + 1)(-2x + 1)$

Exercice 4:
Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f au point d'abscisse a, c'est-à-dire le nombre dérivé $f'(a)$.

1. $f(x) = -4x^2 + 6x + 1$
   $a = 1$
2. $g(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}x + 2$
   $a = 3$
3. $h(x) = -\dfrac{x^3}{3} + x^2$
   $a = 3$
4. $i(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$
   $a = -2$

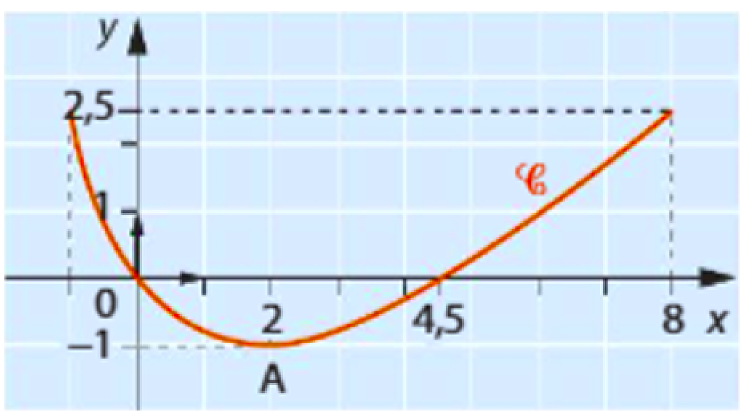
Exercice 5:
Soit f la fonction définie sur $[3; +\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{2x - 6}$. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction f ainsi que l'expression de son expression dérivée.

Exercice 6:
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f : x \mapsto \dfrac{x^2+6x+2}{x-1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
2. Existe-t-il des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ où la tangente a une pente égale à 1 ? Justifier.
3. Existe-t-il des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -3x + 1$? Si oui, déterminer leurs abscisses.

Exercice 7:
La courbe $\mathcal{C}$ de la figure est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[-1; 8]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.
On précise que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A(2; -1)$ est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Résoudre graphiquement dans $[-1; 8]$ les équations et inéquations suivantes:
   (a) $f'(x) = 0$
   (b) $f'(x) < 0$
   (c) $f'(x) > 0$
2. Etablir le tableau de variation de f sur $[-1; 8]$
3. Utiliser les indications de la figure pour résoudre dans $[-1; 8]$ l'équation $f(x) = 0$
4. En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans $[-1; 8]$



Exercice 8:
f est une fonction définie sur $[0; 3]$. Son tableau de variation sur $[0; 3]$ est :

x	0		2		3
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{16}{3}$	$\searrow$	3

1. f est dérivable sur $[0; 3]$. On admet que $f'(2) = 0$ et que f' ne s'annule que en 2. Donner le tableau de signe de f'
2. Tracer une courbe représentative possible de f dans un repère orthonormé

Exercice 9:
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous le tableau de signes de $f'(x)$.

x	$-\infty$		15		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\infty; 15]$? sur l'intervalle $[15; +\infty[$?

Exercice 10:
Soit f une fonction dérivable sur $[0; 9]$. On donne ci-dessous le tableau de signes de $f'(x)$.

x	0		2		5		9
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 9]$.

Exercice 11:
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout réel x, $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

1. Justifier que, pour tout réel x, $f'(x) = 2x - 4$

2. Recopier et compléter le tableau de variation de f donné ci-dessous.

x	0		$\cdots$		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$					

3. Quel est le minimum de f sur $[0;3]$? En quelle valeur de x est-il atteint ?

Exercice 12:
Soit f la fonction définie sur $[-1;6]$ par $f : x \mapsto -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - \dfrac{5}{2}$.
Etudier les variations de f sur $[-1;6]$.
La méthode à suivre est:

1. *Calculer* $f'(x)$
2. *Etudier le signe de* f' *sur* $[-1;6]$
3. *Etablir le tableau de varaition de* f

Exercice 13:
On considère la fonction f définie sur $[-3;3]$ par :
$f : x \mapsto x^2 - 2x - 3$.

1. Déterminer f'
2. Etudier le signe de f'
3. En déduire les variations de f et donner son tableau de variation
4. Déterminer le minimum de f sur son intervalle de définition

Exercice 14:
Soit f la fonction définie sur $[1;2]$ par $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - x + \dfrac{1}{3}$.

1. Déterminer f'
2. Vérifier que $\forall x \in [1;2]$, $f'(x) = (x-1)(x+1)$
3. Etudier le signe f' sur $[1;2]$ dans un tableau
4. Etablir le tableau de variation de f

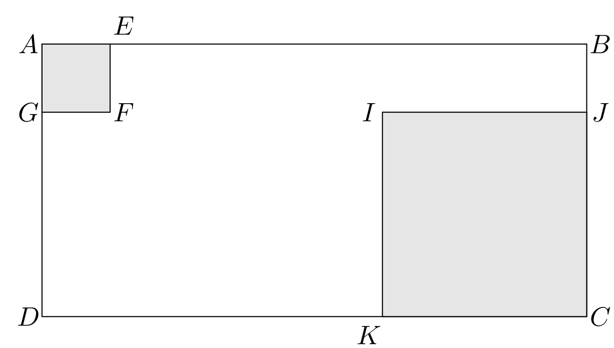
Exercice 15:
Pour chaque fonction suivante, définie et dérivable sur un intervalle I, calculer sa dérivée puis dresser son tableau de variations.

1. $\alpha : x \mapsto \dfrac{3x-1}{x+2}$, $I = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$.
2. $\beta : x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$, $I = \mathbb{R}^*$.
3. $\gamma : t \mapsto t\sqrt{t} + 1$, $I = \mathbb{R}^{*+}$.
4. $\delta : x \mapsto \dfrac{5}{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$.

Exercice 16:
A Amsterdam, une agence lance une campagne publicitaire sur une durée de 15 semaines afin de promouvoir une nouvelle marque de smoothies. Un étude montre qu'apèrs x semaines de campagne publicitaire, le pourcentage de personnes de cette ville ayant pris connaissance de la marque est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;30]$ par : $f : x \mapsto \dfrac{75x}{x+2}$.
L'objectif fixé à l'agence par l'entreprise qui produit ce smoothie au qu'au moins 70% des habitants d'Amsterdam aient pris connaissance de cette marque.

1. Peut-on affirmer qu'après 10 semaines de publicité, l'objectif est atteint ?
2. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0;30]$.
3. Après les 15 premières semaines de campagne, l'agence demande un délai supplémentaire. Justifier cette demande.
4. Combien de semaines supplémentaires seront nécessaires pour atteindre l'objectif fixé par l'entreprise ?

Exercice 17:
Dans une cour rectangulaire $ABCD$ de $8m$ sur $4m$, on souhaite délimiter deux carrés potagers dans deux coins opposés ($AEFG$ et $IJCK$) avec G, F, I et J alignés. Comment faut-il construire ces deux carrés potagers pour que l'aire de la zone restante soit maximale.

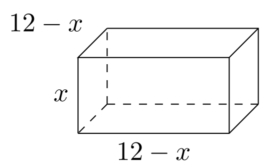


Exercice 18:
Un salon de coiffure est ouvert de $9h$ à $19h$. Le nombre de clients présents dans le salon au cours de la journée est modélisé par la fonction N définie $[0;10]$ par $N : t \mapsto -0,5t^3 + 6,75t^2 - 21t + 35$. A quelle heure le nombre de clients attendus dans le salon est-il maximal ? Donner une estimation de ce nombre.

Exercice 19:
Tempérer le chocolat consiste à le faire fondre en trois étapes afin de lui donner un forme idéale pour réaliser des enrobages.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;12,5]$ par :
$f(t) = 0,14t^3 - 3,15t^2 + 18,48t + 18$
Lorsque t représente le temps (en minutes), on admet que $f(t)$ modélise la température (en degré Celsius) du chocolat à l'instant t, au cours d'une opération de tempérage.

1. Pour tout t de l'intervalle $[0;12,5]$, calculer $f'(t)$ et vérifier que $f'(t) = 0,42(t-4)(t-11)$.
2. Construire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;12,5]$.
3. Selon ce modèle, quelle est la température maximale atteinte lors du tempérage de ce chocolat ?

Exercice 20:
On veut réaliser, dans l'angle d'un plan de travail, un rangement ayant la forme d'un pavé droit selon le plan ci-dessous. Les longueurs sont en décimètres et la hauteur x du rangement est comprise entre 0 et 12 décimètres.



1. Justifier que le volume (en dm^3) du rangement est donné par la fonction f définie l'intervalle $[0;12]$ par $f(x) = x^3 - 24x^2 + 144x$
2. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [0;12]$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in [0;12]$, $f'(x) = 3(x-4)(x-12)$.
3. Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;12]$ et en déduire les variations de f sur $[0;12]$.
4. Déterminer la valeur de x pour laquelle le rangement a un volume maximal. Quel est ce volume maximal ?

Exercice 21:
Un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 0 à 45 kilogrammes de ce produit par semaine durant la période de production de truffe. On désigne par $B(x)$ le bénéfice hébdomadaire (en euros) réalisé par la vente de x kilogrammes de truffes. La fonction B est définie sur l'intervalle $[0;45]$ par :
$B(x) = -x^3 + 60x^2 - 525x$.

1. Calculer $B'(x)$ pour $x \in [0;45]$.
2. Montrer que, pour tout $x \in [0;45]$, $B'(x) = (-3x+15)(x-35)$.
3. Etudier le signe de $B'(x)$ sur $[0;45]$. En déduire le tableau de variation de la fonction B.
4. Pour quelle quantité de truffes le bénéfice du producteur est-il maximal ? A combien s'élève-t-il alors ?

Exercice 22:
Le service d'urgence d'un hôpital reçoit un patient infecté par une bactérie très virulente. On administre à ce patient un puissant antibiotique. On considère que la fonction f permet de modéliser, en fonction du temps, le nombre de bactéries (en centaines), présentes dans le prélèvement sanguin effectué sur le patient à l'instant t (en heures). Cette fonction est définie sur l'intervalle $[0;12]$ par :
$f(t) = -t^3 + 9t^2 + 21t + 190$

1. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(t)$ pour tout réel $t \in [0;12]$.
2. Montrer que, pour tout réel $t \in [0;12]$: $f'(t) = -3(t+1)(t-7)$.
3. Etudier le signe de $f'(t)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0;12]$.
4. Déterminer le maximum de f sur l'intervalle $[0;12]$ et préciser en quelle valeur de t il est atteint. Interpréter ce résultat.
5. La vitesse de croissance du nombre de bactéries à l'instant t est donnée par $f'(t)$. Déterminer la vitesse de croissance du nombre de bactéries à l'instant $t = 10$.

Exercice 23:
Dans une entreprise fabriquant du sucre de canne, le coût total de production (en euros) en fonction de la quantité produite q (en tonnes) peut être modélisé par la fonction C définie pour tout $q \in [0;10]$ par $C(q) = q^3 - 6q^2 + 24q + 100$.

1. Calculer $C(0)$. Interpréter ce résultat.
2. En économie, on appelle coût moyen le quotient du coût total par la quantité produite et coût marginal le coût de fabrication pour une unité supplémentaire.

(a) Déterminer le coût moyen pour 8 tonnes de sucre produit.

(b) Le coput marginal est assimilé à la dérivée du coût total. Déterminer le coût marginal lorsque l'on produit 9 tonnes de sucre.

3. (a) Vérifier que $\forall q \in]0;10]$, l'équation $\dfrac{C(q)}{q} = C'(q)$ est équivalente à l'équation $2q^3 - 6q^2 - 100 = 0$

   (b) Vérifier que, pour tout $q \in]0;10]$, $2q^3 - 6q^2 - 100 = 2(q-5)(q^2+2q+10)$, puis résoudre l'équation $2q^3 - 6q^2 - 100 = 0$ dans l'intervalle $]0;10]$.

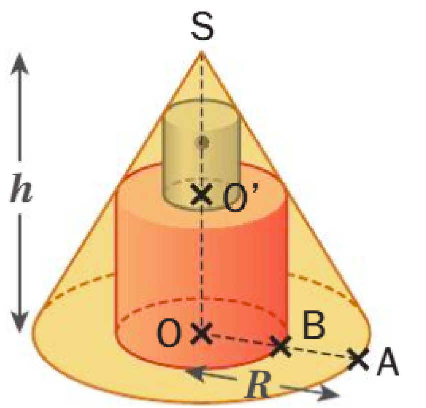
   (c) Pour quelle quantité de sucre produit le coût moyen est-il égal au coût marginal ?

Exercice 24:

Un parfumeur veut fabriquer une boîte de présentation en forme de cône pour contenir un flacon de parfum cylindrique de rayon $3cm$ et de hauteur $5cm$. On note R le rayon de la base de la boît conique et h sa hauteur. Pour diminuer le coût de fabrication, le parfumeur souhaite utiliser le moins de carton possible et donc trouver la boîte conique de volume minimal.

1. Compte tenu des contraintes, exprimer la hauteur h de la boîte conique en fonction de R. En déduire son volume $\mathcal{V}$ en fonction de R.

2. Déterminer la valeur du rayon R et de la hauteur h de cette boîte conique de sorte que son volume soit minimal. Quel est ce volume minimal ?



1.3 Algorithmes et Python

Exercice 25:

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ax^2 + bx + 5$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

1. Déterminer l'expression de la dérivée de f.

2. Proposer un algorithme qui, à partir des valeurs de a et b connues, indique les intervalles sur lesquels la fonction f est monotone et le sens de variation de f sur chacun de ces intervalles.

3. Programme cet algorithme à l'aide d'une fonction en Python.

Exercice 26:

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. Proposer un algorithme qui, à partir des valeurs connues a, b et c, indique la valeur de l'extremum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ en précisant s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum, ainsi que la valeur en laquelle il est atteint.

2. Programmer cet algorithme Python à l'aide d'une fonction renvoyant une liste des résultats démandés.

1.4 Approfondissements

Exercice 27:

Si une fonction f est n fois dérivable, on note $f^{(n)}$ sa dérivée n-ième.

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x\sqrt{x}$. Justifier que les fonction f, f' et f'' sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer une expression de $f^{(3)}(x)$.

2. On note x la fonction inverse. Pour tout $(x,n) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{N}^*$, déterminer une expression de $f^{(n)}(x)$ en fonction de n.