1 Suites arithmético-géométriques

1.1 Compétences Attendues

- Pour une suite arithmétique ou géométrique, calculer le terme général, la somme de termes consécutifs, déterminer le sens de variation.
- Modéliser un phénomène discret à croissance linéaire par une suite arithmétique, un phénomène discret à croissance exponentielle par une suite géométrique.
- Conjecturer, dans des cas simples, la limite éventuelle d'une suite.

1.2 Exercices

Exercice 1:
On définit la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 = -1$ et sa raison $r = \frac{1}{4}$. Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4.

Exercice 2:
On définit la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 et sa raison r. Dans chacun des cas suivants, calculer u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 et u_5.

1. $u_0 = \frac{1}{2}$ et $r = -\frac{1}{4}$
2. $u_0 = 0,36$ et $r = 0,25$
3. $u_0 = 1000$ et $r = 56,3$

Exercice 3:
On définit la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 et sa raison r.

1. On suppose que $u_2 = 2$ et $r = -3$; calculer u_0.
2. On suppose que $u_4 = 1200$ et $r = 50$; calculer u_0
3. On suppose que $u_2 = 10$ et $U_4 = 30$. Déterminer r et u_0
4. On suppose que $u_1 = 106$ et $u_4 = 118$

Exercice 4:
On définit la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 = 2$ et sa raison $r = 0,5$.

1. Ecrire la relation donnant u_{n+1} en fonction de u_n
2. Calculer u_1 ; u_2 et u_3

Exercice 5:
On définit la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme $u_1 = 5000$ et sa raison $r = -500$.

1. Ecrire les six premiers termes de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Déterminer l'entier naturel n tel que $u_n = \frac{1}{2}u_1$
3. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 6:
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}*$,$u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2}$.

1. Calculer u_2 ; u_3 ; u_4 et u_5
2. Placer les six premiers points de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un repère orthonormé.
3. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 7:
On donne la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 et une relation de récurrence. Dans chaque cas, représenter graphiquement les quatre premiers points de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un repère orthonormé et déterminer son sens de variation.

1. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n - 2$
2. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 3$
3. $u_0 = -1$ et $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}$

Exercice 8:
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $v_1 = -3$ et de raison $r = 2,6$.

1. Calculer les termes v_2, v_3 et v_4.
2. Ecrire la relation de récurrence exprimant v_{n+1} en fonction de v_n.
3. Donner l'expression de v_n en fonction de n.
4. Calculer v_{50}

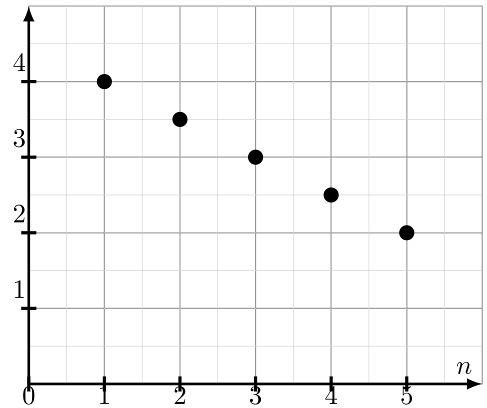
Exercice 9:
Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $w_2 = 2,5$ et de raison $r = -0,25$.

1. Calculer les termes w_3, w_4 et w_5.

2. Ecrire la relation de récurrence exprimant w_{n+1} en fonction de w_n.
3. Donner l'expression de w_n en fonction de n.
4. Calculer w_{30}.

Exercice 10:

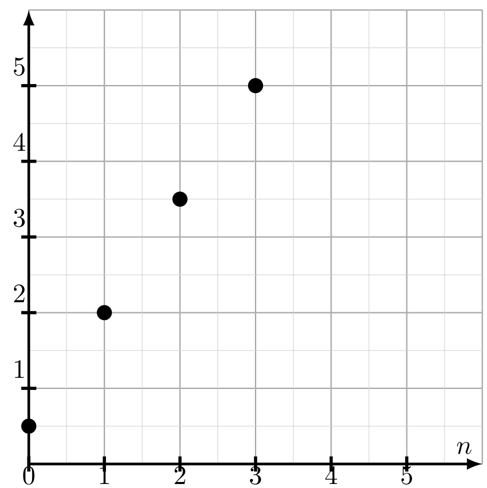
La figure ci-dessous donne la représentation graphique d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme u_0 et de raison r.



1. Déterminer graphiquement u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5 et r
2. Calculer u_9
3. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 11:

La figure ci-dessous donne la représentation graphique d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme u_0 et de raison r.



1. Déterminer graphiquement u_0 et r
2. Calculer u_{10}
3. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 12:
Les situation ci-dessous peuvent-elles être modélisées par une suite arithmétique ? Si oui, en déterminer la raison et le premier terme.

1. Le prix d'un produit augmente de 2% par an. Son prix initial était de $2,15$ euros.
2. Un magasin de vêtements fait une promotion sur des t-shirts : le premier acheté est au prix de 12 euros et les suivants au prix de 8 euros chacun.
3. Pendant les premiers jours d'une épidémie, le nombre de patients qui se rendent dans un cabinet médical augmente quotidiennement de 10 patients. Le premier jour, le cabinet reçoit 35 patients.
4. Le prix d'un produit augmente de 20 centimes par and. Son prix initial était de $2,15$ euros.

Exercice 13:
Un téléphérique progresse à vitesse constante. Chaque seconde, son altitude augmente de $0,85m$. La gare de départ est à une altitude de $1350m$. La durée du trajet étant de 15 minutes, quelle est l'altitude de la gare d'arrivée ?

Exercice 14:
Alyson a planté une rhubarbe de jardin d'un mètre de hauteur qui grandit de $5cm$ tous les mois. Son frère Aloys a planté un fuchsia rustique de $50cm$ de hauteur qui grandit de $10cm$ tous les mois. On note R_n la hauteur en mètres de la rhubarbe de jardin au bout de n mois et F_n celle du fuchsia rustique. Ces deux plantes auront-elles un jour la même hauteur ? Si oui à partir de combien de mois ?

Exercice 15:
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Dans chacun des cas suivants, calculer u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 et u_5.

1. $u_0 = 1,5$ et $q = 2$
2. $u_0 = 10000$ et $q = 1,1$
3. $u_0 = 5000$ et $q = 1,03$
4. $u_0 = 1000$ et $q = 0,9$

Exercice 16:
On considère une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q = 2$ telle que $u_4 = 12$. Calculer u_3 ; u_5 et u_6.

Exercice 17:
On considère une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On donne :

1. $u_3 = 51200$ et $q = 0,8$. Calculer u_0
2. $u_4 = 20736$ et $q = 1,2$. Calculer u_0
3. $u_2 = 4$ et $u_4 = \dfrac{16}{9}$. Calculer q

Exercice 18:
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 16$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n$

1. Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4
2. Placer les cinq premiers points de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un repère orthogonal.
3. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 19:
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$

1. Calculer u_2 ; u_3 et u_4
2. Placer les quatre premiers points de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un repère orthonormé.
3. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 20:
On donne la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 et une relation de récurrence. Dans chaque cas, représenter graphiquement les trois premiers points de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un repère orthonormé et déterminer son sens de variation.

1. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n$
2. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2,5u_n$

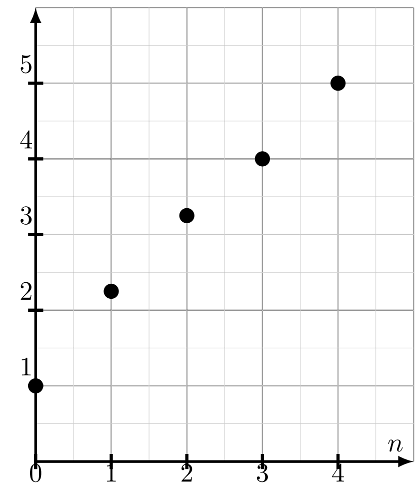
Exercice 21:
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $v_1 = -3$ et de raison $q = 2,6$.

1. Calculer les termes v_2, v_3 et v_4.
2. Ecrire la relation de récurrence exprimant v_{n+1} en fonction de v_n.
3. Donner l'expression de v_n en fonction de n.
4. Calculer v_{50}

Exercice 22:
Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $w_2 = 2,5$ et de raison $q = -0,25$.

1. Calculer les termes w_3, w_4 et w_5.
2. Ecrire la relation de récurrence exprimant w_{n+1} en fonction de w_n.
3. Donner l'expression de w_n en fonction de n.
4. Calculer w_{30}.

Exercice 23:
La figure ci-dessous donne la représentation graphique d'une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme u_0 et de raison q.
Déterminer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que la raison.



Exercice 24:
Les situations ci-dessous peuvent-elles être modélisées par une suite géométrique ? Si oui, déterminer la raison et le premier terme.

1. La consommation d'un produit augmente régulièrement de 2 tonnes par an. Elle était de 17 tonnes au départ.
2. La population d'une ville, initialement de 10000 habitants, diminue chaque année de 3%.
3. Un établissement scolaire compte 1853 élèves. 19% des élèves sont en seconde.
4. On a 100 euros au départ. A la fin de chaque mois, on augmente le montant précédent de 10%, puis on prélève 5 euros.

Exercice 25:
Le chiffre d'affaires d'une entreprise du secteur de la téléphonie s'accroît tous les ans de 50 000 euros. En 2019, le chiffre d'affaires était de 500 000 euros. On note $C_0 = 500\ 000$ et C_n le chiffres d'affaires au cours de l'année $2019 + n$.

1. Donner pour tout entier n, l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n.
2. (a) En déduire que la nature de la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en donnant son premier terme et sa raison.

(b) Calculer C_5 puis interpréter le résultat obtenu.

(c) Calculer le chiffre d'affaires prévisible pour 2025.

3. Déterminer en quelle année on peut prévoir un chiffre d'affaires de 1 050 000 euros.

Exercice 26:
En janvier 2019, une firme offrait sur le marché 2 000 unités d'un nouveau produit avec une perspective d'augmentation de cette production de 5% par an. On suppose que ces prévisions se poursuivent. On pose $p_0 = 2\ 000$.
On note p_n la quantité offerte en janvier de l'année $2019 + n$.

1. Calculer p_1, p_2 et p_3.
2. Exprimer pour tout entier n, p_{n+1} en fonction de p_n. En déduire la nature de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Exprimer p_n en fonction de n.
4. Calculer la production totale prévisible entre janvier 2019 et janvier 2026.

Exercice 27:
Une blanchisserie industrielle prévoit d'augmenter sa capacité de lavage de draps pour des hôtels de 10% chaque année. Cette blanchisserie a lavé 260 000 draps la première année. Dans ce qui suit, U_n désigne le nombre prévu de draps lavés la n-ième année, donc $U_1 = 260\ 000$.

1. Calculer U_2, U_3 et U_4.
2. Exprimer pour tout entier n, U_{n+1} en fonction de U_n. En déduire la nature de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Exprimer U_n en fonction de n.
4. On admet que l'objectif prévisionnel est maintenu.
   (a) Calculer le nombre de draps lavés la 10° année.
   (b) Calculer le nombre total de draps que la blanchisserie aura lavés pendant 10 ans.

Exercice 28:
Afin d'assurer son appartement, un couple compare deux propositions.

- *Proposition A:* Le montant de l'assurance est de 200 euros la première année puis augmente de 10 euros par an.
- *Proposition B:* le montant de l'assurance est de 100 euros la première année et augmente de 6% par an.

On note a_n le montant de l'assurance avec la proposition A et b_n celui avec la proposition B la n-ième année. Ainsi $a_1 = 200$ et $b_1 = 100$.

1. (a) Calculer a_2 puis a_3.
   (b) Donner la nature de la suite (a_n) en précisant sa raison.
   (c) Donner, pour tout entier n, a_n en fonction de n.
2. (a) Calculer b_2 puis b_3.
   (b) Donner la nature de la suite (b_n) en précisant sa raison.
   (c) Donner, pour tout entier n, b_n en fonction de n.
3. Quelle proposition est la plus avantageuse si le couple conserve son assurance pendant 10 ans ? Justifier la réponse.

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 29:

1. Pour préparer une compétition, Khaled s'entraine de façon progressive. Il commence par courir $10km$ et augmente chaque jour la distance de $100m$, pendant quelques semaines. Quelle distance, en km, parcourra-t-il au début de la quatrième semaine d'entrainement ?
2. Parmi les deux fonctions en Python ci-dessous, laquelle permet de répondre à la question ? Expliquer.

```python
def fonction1(n):
    u=10000
    for k in range(n*7):
        u=u*100
    return u

def fonction1(n):
    u=10000
    for k in range(n*7):
        u=u+100
    return u
```

Exercice 30:
Un concours scientifique est organisé depuis 2015. Les filles ne représentaient alors qu'un quart des participants. Entre 2015 et 2019, on a constaté une augmentation moyenne annuelle de la proportion de filles participant à ce concours de 12%. On extrapole que la proportion de filles va continuer à progresser ainsi pendant 10 ans.

1. (a) Quelle était la proportion de filles en 2016 ?
   (b) Quelle serait alors la proportion de filles en 2021 (arrondir au millième) ?
   (c) Pour tout entier n, on note p_n la proportion de filles de l'année $2015+n$. Pour $n<10$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
   (d) En déduire la nature de la suite (p_n) et en préciser les caractéristiques.
2. On donne la fonction en Python suivant :

```python
def proportionfilles(t):
    p=0.25
    n=0
    while p<t:
        p=1.12*p
        n=n+1
    return n+2015
```

   Quelle est la valeur de `proportionfilles(0.5)` ? Interpréter ce résultat.

1.4 Approfondissements

Exercice 31:

1. On note C_n la somme des carrés de n premiers nombres entiers non nuls. Définir la suite (C_n) par récurrence.
2. On pose, pour tout n, $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   (a) Calculer u_1.
   (b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   (c) En déduire que pour tout $n, u_{n+1}-u_n=(n+1)^2$.
   (d) Que peut-on en déduire sur les suites (C_n) et (u_n) ?
3. Que vaut la somme $1^2+2^2+...+195^2$?

Exercice 32:
Les Tours de Hanoï sont un jeu constitué de trois piquets et d'un lot de disques de tailles différentes percés au centre. Au départ, un lot de disque est placé sur un seul piquet. Les disques sont posés les uns sur les autres du plus grand au plus petit. Le jeu consiste à déplacer le lot de disques sur un des deux autres piquets en déplaçant un seul disque à la fois et en le posant sur un disque de taille plus grande ou sur un piquet vide.
Pour tout entier n, on note u_n le nombre minimal d'étapes pour déplacer n disques. On appelle A, B et C les trois piquets.

1. Expliquer pourquoi on a $u_1=1$.
2. Pour $n\geq 2$, si on a réussi à déplacer les $n-1$ disques les plus petits (en u_{n-1} étapes) du piquet A au piquet B, on déplace le plus grand disque sur le piquet C et il ne reste plus qu'à déplacer à nouveau les $n-1$ disques les plus petits vers le piquet C.
   Exprimer u_n en fonction de u_{n-1}.
3. On définit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n+1$.
   (a) Vérifier que (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme à déterminer.
   (b) En déduire, pour tout nombre entier n, l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n.
   (c) En déduire le nombre minimal d'étapes nécessaires pour déplacer un lot de huit disques.