

# 1 Fonction exponentielle

## 1.1 Compétences Attendues

- Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.
- Pour une valeur numérique strictement positive de  $k$ , représenter graphiquement les fonctions  $t \mapsto e^{\pm kt}$ .
- Modéliser une situation par une croissance, une décroissance exponentielle (par exemple évolution d'un capital à taux fixe, décroissance radioactive).

## 1.2 Exercices

### Exercice 1:

Simplifier les expressions suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} 1. \sqrt{\frac{e \times e^{-5}}{e^2}} \\ 2. \frac{e^{1,4} \times e^{-1}}{e^{1,2}} \end{array} \right| \begin{array}{l} 3. \sqrt{\frac{e \times e^2}{e^{-7}}} \\ 4. e^{1,5} \times (e^{-0,5})^5 \end{array}$$

### Exercice 2:

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , simplifier les expressions suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} 1. \frac{e^{x^2} \times (e^x)^2}{e^{(x+1)^2}} \\ 2. \frac{e^{3+x}}{e^{3-x}} \end{array} \right| 3. \frac{e^{2x+4} \times e^{-x+1}}{e^{x+5}}$$

**Exercice 3:** Soit  $x \in \mathbb{R}$ , résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} 1. e^{-7x} \times e^{2x+8} = e^{-x+3} \\ 2. \frac{e^{3x-1}}{e^{-5x+4}} = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} 3. (e^{3x})^2 \times e^{x^2+5} = 1 \\ 4. e^{1-x} - e^{2x^2} = 0 \end{array}$$

### Exercice 4:

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} 1. x^x(e^x - 1) = 0 \\ 2. (e^x + 8)(e^x - e) = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 3. xe^{2x+1} = x \\ 4. (e^{-3x+6} - e)(e^{x^2} - 1) = 0 \end{array}$$

### Exercice 5:

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , résoudre sur  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} 1. e^{x^2+6x+5} \geq 1 \\ 2. e^{-x^2-3x+5} > e \end{array} \right| \begin{array}{l} 3. e^{2x^2-3x-1} \leq (e^4)^2 \\ 4. \frac{e^{x^2} \times (e^{-5})^3}{(e^x)^2} \leq 1 \end{array}$$

### Exercice 6:

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations suivantes:

$$\begin{array}{l} 1. x^2 + (1 - e)x - e = 0 \\ 2. e^{2x} + e^{x-2} = 0 \end{array}$$

### Exercice 7:

On considère la fonction  $f : x \mapsto e^x - \frac{1}{x}$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .

1. Déterminer une expression de la dérivée de  $f$ .
2. Donner le tableau de signes de cette dérivée.
3. En déduire le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$

### Exercice 8:

On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{e^x}{x+1}$  définie et dérivable sur  $] -1; +\infty[$ .

1. Donner le tableau de signes de  $f$ .
2. Dresser le tableau de variations de  $f$  après avoir calculé sa dérivée.

### Exercice 9:

On considère la fonction  $f : x \mapsto e^x - x + 1$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Etablir le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 10:

On considère la fonction  $g : x \mapsto x^2 e^x$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Etablir le tableau de variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 11:** On considère les fonctions  $f : x \mapsto e^{2x-5}$  et  $g : x \mapsto e^{-2x+3}$ .

1. Etablir les tableaux de variations des fonctions  $f$  et  $g$ .
2. Résoudre pour tout  $x \in \mathbb{R}$  l'inéquation  $g(x) > f(x)$ .

**Exercice 12:**

On considère la fonction  $f : x \mapsto (-x^2 + 3x - 1)e^{-x}$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
Etablir le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 13:**

On considère la fonction  $g : x \mapsto \frac{e^{12x+5}}{x^3}$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $g'(x) = \frac{(12x - 3)e^{12x+5}}{x^4}$ .
2. En déduire le tableau de variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

**Exercice 14:**

1. On considère la fonction  $g : x \mapsto (x - 2)e^{-2x+6} + 3$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
Etablir le tableau de variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Le bénéfice (en millions d'euros) d'une grande entreprise en fonction de la quantité  $x$  (en tonnes) de métal vendue est donné par la fonction  $g$ .
  - (a) Quelle quantité minimale doit vendre l'entreprise pour réaliser un bénéfice ?
  - (b) Quel est le bénéfice maximal ? Pour quelle quantité de métal vendu ?

**Exercice 15:**

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de  $1000^\circ\text{C}$ . A la fin de la cuisson, il est atteint et il refroidit. On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint. La température du four est exprimée en degré Celsius ( $^\circ\text{C}$ ).

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à  $70^\circ\text{C}$  ; sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

On note  $t$  le temps (en h) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint. La température du four (en  $^\circ\text{C}$ ) à l'instant  $t$  est donnée par la fonction  $f$  définie sur

$\mathbb{R}^+$  par  $f : x \mapsto ae^{-\frac{t}{5}} + b$  où  $a, b \in \mathbb{R}$ .

On admet que pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$  :  $f'(t) + \frac{1}{5}f(t) = 4$ .

1. Déterminer les valeurs de  $a$  et  $b$  sachant qu'initialement la température du four est de  $1000^\circ\text{C}$ .
2. Au bout de combien d'heures peut-on ouvrir la porte du four en toute sécurité ?

**Exercice 16:**

La fonction  $f : x \mapsto \frac{2+x}{e^x}$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , est la dérivée d'une fonction dérivable sur

$\mathbb{R}$  de la forme  $x \mapsto \frac{ax+b}{e^x}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Déterminer les valeurs de  $a$  et de  $b$ .

**Exercice 17:**

On appelle :

- Fonction cosinus hyperbolique la fonction notée  $\cosh$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\cosh : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .
- Fonction sinus hyperbolique la fonction notée  $\sinh$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\sinh : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

1. Montrer que la fonction cosinus hyperbolique est paire et que la fonction sinus hyperbolique est impaire.
2. Montrer que, pour tout réel  $x$ :  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ .
3. (a) Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $\sinh'(x) = \cosh(x)$ .  
(b) Montrer que la fonction  $\sinh$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $\sinh(0)$ .  
(c) En déduire le tableau de signe de  $\sinh$ .
4. (a) Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $\cosh'(x) = \sinh(x)$ .  
(b) En déduire le tableau de variations de la fonction  $\cosh$ .  
(c) Quel est le minimum atteint par la fonction  $\cosh$  sur  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice 18:**

On définit sur  $\mathbb{R}^*$  la fonction  $f : x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 1}$ . Etablir le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

**Exercice 19:**

Une entreprise fabrique chaque jour  $x$  tonne d'un produit. Le coût total mensuel, en milliers d'euros, pour produire  $x$  tonnes du produit est modélisé par la fonction  $C : x \mapsto (2x - 9)e^{1-0,5x}$ .

1. Le coût marginal, qui correspond au supplément de coût total pour la production d'une tonne supplémentaire, est égal à la dérivée du coût total.
  - (a) Montrer que le coût marginal est donné par la fonction  $C_m : x \mapsto (6,5 - x)e^{1-0,5x}$ .
  - (b) En déduire le tableau de variations de la fonction  $C$  sur  $[0; 10]$ .
  - (c) Pour combien de tonnes produites quotidiennement le coût total mensuel est-il maximum ? Quel est ce coût maximum, arrondi au milliers d'euros ?

2. Le coût moyen est donné par la fonction  $f : x \mapsto \frac{C(x)}{x}$ .

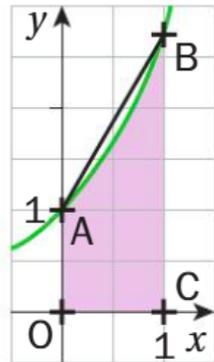
- (a) Vérifier que la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0; 10]$  et que pour tout  $x \in ]0; 10]$ ,  $f'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{-2x^2 + 9x + 18}{x^2} \times e^{1-0,5x}$ .
- (b) Après avoir cherché les solutions  $x \in [0; 10]$  de l'équation  $-2x^2 + 9x + 18 = 0$ , donner le tableau de variations de  $f$  sur  $[0; 10]$
- (c) En déduire le coût moyen maximum de production.

### 1.3 Algorithmes et Python

#### Exercice 20:

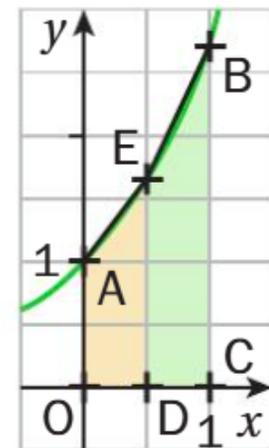
Mona et Erwan veulent déterminer l'aire sous la courbe de la fonction exponentielle délimitée par les droites d'équation  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$  et  $y = e^x$ .

1. Mona estime que l'aire  $\mathcal{A}$  cherchée est proche de celle du trapèze  $ABCO$  avec  $O(0;0)$ ,  $C(1;0)$ ,  $A(0;1)$  et  $B(1,e)$ .



- (a) Quelle est la hauteur du trapèze ? Quelle est la longueur de sa grande base ? de sa petite base ?
- (b) En déduire l'aire du trapèze  $ABCO$ .

2. Erwan pense que l'idée de Mona est bonne mais qu'ils peuvent être plus précis dans leurs calculs. Pour cela, il considère le point  $E$  d'abscisse 0,5 appartenant à la courbe de la fonction exponentielle et il calcule l'aire des deux trapèzes obtenus. Il trouve  $\mathcal{A} = \left(\frac{1 + \sqrt{e}}{2}\right)^2$ .

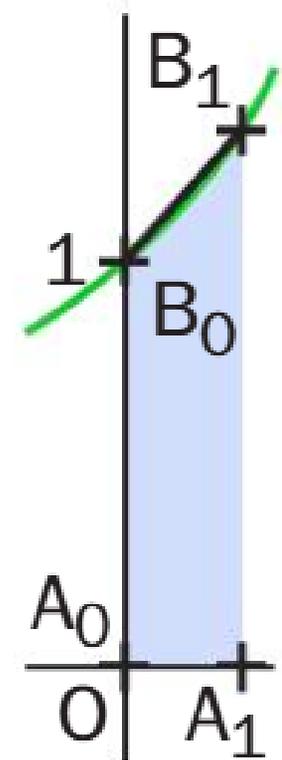


- (a) Déterminer l'aire du trapèze  $AEDO$  et l'aire du trapèze  $EBCD$ .
- (b) Retrouver le résultat d'Erwan.

3. Mona surenchérit en expliquant qu'ils peuvent découper l'intervalle  $[0; 1]$  en  $n \in \mathbb{N}^*$  parties égales et obtenir ainsi  $n$  trapèzes de hauteurs  $\frac{1}{n}$ .

(a) On considère les points  $A_0(0;0)$ ;  $A_1\left(\frac{1}{n}; 0\right)$ ,  $B_0(0;e^0)$  et  $B_1\left(\frac{1}{n}; e^{\frac{1}{n}}\right)$ . Déterminer l'aire du trapèze  $A_0A_1B_0B_1$ .

(b) Pour tout nombre entier naturel  $k \in [0; n - 1]$ , on considère les points  $A_k\left(\frac{k}{n}; 0\right)$ ,  $A_{k+1}\left(\frac{k+1}{n}; 0\right)$ ,  $B_k\left(\frac{k}{n}; e^{\frac{k}{n}}\right)$  et  $B_{k+1} = \left(\frac{k+1}{n}; e^{\frac{k+1}{n}}\right)$ . Déterminer l'aire du trapèze  $A_kA_{k+1}B_kB_{k+1}$ .



4. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous écrit par Mona pour calculer la somme des aires des  $n$  trapèzes.

```

1  A = . . . .
2  for k in range(. . . .):
3      A += np.exp(k/n)/n * (1+np.exp(1/n))/2
4  print(A)
    
```

5. Coder cet algorithme en Python puis le tester pour  $n = 10$ .

## 1.4 Approfondissements

### Exercice 21:

1. Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$  est constante sur  $\mathbb{R}$  que l'on déterminera.
2. En déduire que pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$ .
3. Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ .