

Chapitre 1 : Suites

Table des matières

Chapitre 1 : Suites	1
CARPENTIER Axel	
1 Raisonnement par récurrence	3
2 Comportement d'une suite	4
3 Limites	5
4 Limites et opérations	6
5 Exercice bilan	9

*Contenu

- La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. Cas des suites croissantes non majorées. Suite tendant vers $-\infty$.
- La suite (u_n) converge vers le nombre réel l si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
- Limites et comparaison. Théorèmes des gendarmes.
- Opérations sur les limites.
- Comportement d'une suite géométrique (q^n) où q est un nombre réel.
- Théorème admis : toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge.

1 Raisonnement par récurrence

Définition:

Soit $n \in \mathbb{N}$, on notera $\mathcal{P}(n)$ une propriété mathématiques dépendant de n . C'est-à-dire une phrase exprimée (ou non) avec des symboles mathématiques qui peut-être vraie ou fausse.

Exemple:

Soit $n \in \mathbb{N}$

- $\mathcal{P}(n) : \sum_{p=1}^n p = \frac{n(n+1)}{2}$.
- $\mathcal{P}(n) : n^3 - n$ est un multiple de 3.

La théorie des suites a permis de développer un mode de raisonnement fondamental en mathématiques : le raisonnement par récurrence.

Définition / Méthode: Le raisonnement par récurrence

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est une proposition quelconque dépendant de n et soit $n_0 \in \mathbb{N}$ un entier quelconque. Si l'on démontre que :

- **Initialisation** : $\mathcal{P}(n_0)$ est vrai.
- **Hérédité** : Soit $k \geq n_0$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie $\implies \mathcal{P}(k+1)$.

Alors on aura que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Le fondement du raisonnement précédent est qu'on vérifie qu'une proposition reste vraie terme après terme. Voici un exemple de rédaction attendue :

Exemple :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n) : \sum_{p=0}^n p = \frac{n(n+1)}{2}$. Montrons par récurrence que ce résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation** : On vérifie le résultat au rang 0.
Nous avons $\sum_{k=0}^0 k = 0$ et $\frac{0 \times (0+1)}{2} = 0$. D'où l'initialisation.
- **Hérédité** : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vrai, montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vrai.
On a $\sum_{p=0}^{k+1} p = k+1 + \sum_{p=0}^k p = k+1 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. D'où l'hérédité.
- **Conclusion** : La propriété étant initialisé et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

! Remarque importante

En général, l'hérédité est plus difficile à démontrer que l'initialisation. Il ne faut cependant jamais oublier d'initialiser ! En effet la propriété $\mathcal{P}(n) : 6|7^n + 1$ est héréditaire à partir de $n = 0$ mais l'initialisation est fausse.

Exercice:

Soit $n \in \mathbb{N}$ et (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + 1 \\ u_0 = 2 \end{cases}$.

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{7}{3} \times 4^n - \frac{1}{3}$.

2 Comportement d'une suite

Définition:

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est....:

- ... croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$.
- ... décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.
- ... constante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$.

Exemple :

Soit $n \in \mathbb{N}$,

- La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n + 2$ est croissante.
- La suite (v_n) définie par $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ est décroissante.
- La suite (w_n) définie par $w_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.

Méthode:

Il existe plusieurs manières d'étudier les variations d'une suite. On peut ou bien étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ou bien montrer par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n) : u_{n+1} \geq u_n$ (ou $u_{n+1} \leq u_n$) est vraie.

Exercice:

Soit $n \in \mathbb{N}$, étudier le sens de variation des suites suivantes :

1. $u_n = n^2 - n - 2$

2. $u_n = \frac{3n-2}{n+1}$

3. $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 3 \\ u_0 = 1 \end{cases}$

Définition:

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est....:

- ... majorée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- ... minorée si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$.
- ... bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

Exercice :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = 0, 2u_n + 0, 6 \\ u_0 = -1 \end{cases}$

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1$.

3 Limites

Définition : *Limite finie*

La suite (u_n) converge vers le nombre réel l si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Autrement dit on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \iff \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| < \epsilon$$

On dira alors que (u_n) converge vers l , ou encore que l est la limite de (u_n) .

L'idée est d'étudier ce qu'il se passe quand les valeurs de n deviennent arbitrairement grandes, c'est-à-dire quand n se rapproche de $+\infty$.

! Remarque

Une suite divergente est une suite qui ne converge pas.

Théorème:

La limite d'une suite est unique.

Démonstration : (*Hors programme*)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et (u_n) une suite quelconque. Supposons par l'absurde que (u_n) possède deux limites l_1 et l_2 distinctes.

Par définition de la limite on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, |u_n - l_1| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_1, \forall n \geq n_1, |u_n - l_2| < \epsilon$$

Notons $n_2 = \min(n_0, n_1)$, on a alors pour $\epsilon = \frac{1}{3}|l_1 - l_2| > 0$, pour tout $n \geq n_2$:

$$3\epsilon = |l_1 - l_2| \leq |u_n - l_1| + |u_n - l_2| \leq 2\epsilon$$

D'où $3 \leq 2$, ce qui est absurde donc on a bien le résultat.

Théorème:

- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.

Démonstration : (*Hors programme*)

Montrons uniquement le premier point. Soit $n \in \mathbb{N}$ et (u_n) une suite croissante et majorée. Soit $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. A admet donc une borne supérieure que nous noterons l . Soit $\epsilon > 0$, par définition de la borne supérieure on a qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que $l - \epsilon \leq u_{n_0} \leq l$.

Or par croissance et majoration de (u_n) on a $\forall n > n_0, l - \epsilon \leq u_{n_0} \leq u_n \leq l \leq l + \epsilon$.

On retrouve donc bien que (u_n) converge vers une certaine limite l .

Exercice:

Soit $n \in \mathbb{N}$ et (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \\ u_0 = -4 \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que la suite est minorée par 2.
2. Montrer que la suite est décroissante.
3. Que peut-on dire de la convergence de la suite (u_n) ?

Propriété:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- $\forall k \geq 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$
- Si $q \in]-1; 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

Démonstration :

Par application de la limite d'une suite

Définition : (Limite infinie)

- La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. Autrement dit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \iff \forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > A$$

- La suite (u_n) tend vers $-\infty$ si tout intervalle de la forme $] -\infty; A]$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. Autrement dit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \iff \forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n < -A$$

Propriété:

- Toute suite croissante et non majorée a pour limites $+\infty$.
- Toute suite croissante et non majorée a pour limites $-\infty$.

Démonstration :

Montrons uniquement le premier point. Soit $n \in \mathbb{N}$ et (u_n) une suite croissante et non majorée. Soit $A > 0$, comme la suite (u_n) n'est pas majorée, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que $u_{n_0} \geq A$. Par croissance de la suite (u_n) , on a que pour tout $n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0} \geq A$. D'où la divergence de la suite vers $+\infty$.

Exercice:

Soit $n \in \mathbb{N}$ et (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 1 \\ u_0 = 4 \end{cases}$$

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

4 Limites et opérations

En analogie à la dérivation (et à d'autres domaines des mathématiques), il est possible de déduire d'un résultat d'une somme/produit/quotient à partir de chaque opérateur. C'est-à-dire, ici, il est possible de déterminer la limite d'une somme/produit/quotient de suites à partir de la connaissance de la limite de chaque suite.

Soient (u_n) , (v_n) deux suites quelconques et l, l' deux réels quelconques.

Propriété:

On récapitule toute les informations dans le tableau ci-dessous selon les différents cas.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n =$	$l \times l'$	$+\infty$ F.I si $l = 0$	$-\infty$ F.I si $l = 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{l}{l'}$ si $l' \neq 0$	0	0	F.I	F.I	F.I

! Remarque

Il existe trois formes indéterminées fondamentales :

- "Additionner" $+\infty$ avec $-\infty$.
- "Multiplier" $\pm\infty$ par 0 .
- "Diviser" $\pm\infty$ par $\pm\infty$.

Lorsqu'on a une forme indéterminée, cela signifie qu'on ne peut pas conclure directement, il faut donc lever l'incertitude en factorisant ou en développant.

Par exemple pour la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 2n + 1$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2n = -\infty$. On a donc ici une forme indéterminée. Factorisons l'expression par n^2 , on a donc :

$$u_n = n^2 - 2n + 1 = n^2 \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right).$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 1$.

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Exercice:

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) .

1. $u_n = n^3 + \frac{1}{n}$

3. $u_n = \frac{3 - \frac{4}{n}}{\frac{2}{n^2}}$

5. $u_n = \frac{2}{3n} - \frac{2n^3 - 3}{3n^2 + n + 1}$

2. $u_n = (3n + 5)(-7n + 1)$

4. $u_n = \frac{\frac{n^2}{n^2} + 3n - 5}{n^3 - 6n^2 + 1}$

6. $u_n = n\sqrt{n} - n$

Théorème : (des gendarmes)

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n \leq w_n$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l \in \mathbb{R}$

On a alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Démonstration : (Hors programme)

Par définition de la limite on a que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, l - \epsilon \leq v_n$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, w_n \leq l + \epsilon$$

On a donc pour $\epsilon > 0$ qu'il existe $n_2 = \min(n_0, n_1)$ tel que pour tout $n \geq n_2$ on a :

$$l - \epsilon \leq v_n \leq u_n \leq w_n \leq l + \epsilon.$$

On retrouve donc bien que la suite (u_n) converge bien vers l . D'où le résultat.

Exercice :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et (w_n) la suite définie par $w_n = \frac{1}{n + \cos(n)}$. Déterminer la limite de la suite (w_n) .

5 Exercice bilan

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{1 + 5^n}{2 + 3^n}$$

Affirmation 1 : La suite (u_n) converge vers $\frac{5}{2}$.

2. La suite (w_n) définie par $w_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3$.

Affirmation 2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \geq 0$.