

## Chapitre 2 : Combinatoire et Dénombrement

# Table des matières

|                                                  |          |
|--------------------------------------------------|----------|
| <b>Chapitre 2 : Combinatoire et Dénombrement</b> | <b>1</b> |
| CARPENTIER Axel                                  |          |
| Contenu                                          | 2        |
| 1 Cardinal d'ensembles                           | 3        |
| 1.1 Ensemble et cardinal                         | 3        |
| 1.2 Principe additif                             | 3        |
| 1.3 Principe multiplicatif                       | 4        |
| 2 Arrangements / Permutations et Combinaisons    | 5        |
| 2.1 Arrangements                                 | 5        |
| 2.2 Permutations                                 | 5        |
| 2.3 Combinaison                                  | 6        |
| 3 Schéma récapitulatif                           | 7        |
| 4 Exercice bilan                                 | 7        |

## Contenu

- Principe additif : nombre d'éléments d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints.
- Principe multiplicatif : nombre d'éléments d'un produit cartésien. Nombre de k-uplets (ou k-listes) d'un ensemble à n éléments.
- Nombre des parties d'un ensemble à n éléments. Lien avec les n-uplets de 0,1, les mots de longueur n sur un alphabet à deux éléments, les chemins dans un arbre, les issues dans une succession de n épreuves de Bernoulli.
- Nombre des k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments. Définition de n! Nombre de permutations d'un ensemble fini à n éléments.
- Combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments : parties à k éléments de l'ensemble. Représentation en termes de mots ou de chemins.
- Pour  $0 \leq k \leq n$ ,  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ .
- Explicitation pour  $k = 0, 1, 2$ . Symétrie. Relation et triangle de Pascal.

---

# 1 Cardinal d'ensembles

## 1.1 Ensemble et cardinal

### Définition:

On dit qu'un ensemble  $E$  est fini lorsqu'il possède un nombre fini d'éléments. On définit alors son cardinal par le nombre d'éléments qu'il possède, noté  $\text{Card}(E)$  (ou encore  $|E|$ ).

### Exemple:

L'ensemble  $E = \{2; 4; 6; 8\}$  est fini et  $|E| = 4$ .

### ! Remarque

Il existe des ensembles qui ne sont pas finis, par exemple  $\mathbb{N}$ , l'ensemble des nombres pairs, l'ensemble des nombres premiers...

---

## 1.2 Principe additif

### Définition:

On dira que deux ensembles  $A$  et  $B$  sont disjoints si et seulement si  $A \cap B = \emptyset$ .

### Exemple :

Les ensembles  $A = \{1; 2; 3\}$  et  $B = \{4; 5; 6\}$  sont disjoints.

### Propriété :

Soient  $A_1, A_2, \dots, A_p$  p ensembles finis deux à deux disjoints. On a alors :

$$\text{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n \text{Card}(A_k)$$

### Démonstration : (Hors programme)

Notons  $\mathcal{P}(n) : \text{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n \text{Card}(A_k)$ .

- **Initialisation:** Pour  $n = 1$  on a bien :

$$\text{Card}(A_1) = \sum_{k=1}^1 \text{Card}(A_k). \text{ D'où l'initialisation.}$$

- **Hérédité:** Supposons que  $\mathcal{P}(k)$  est vraie pour tout  $k < n$ , montrons que  $\mathcal{P}(n)$  l'est aussi.

Soit donc une famille  $(A_1, \dots, A_n)$  de  $n$  ensembles deux à deux disjoints. On a  $\text{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \text{Card}(B_{n-1} \cup A_n)$ , où  $B_{n-1} = A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}$ . Or on a que les  $A_i, i \in \{1, \dots, n\}$  sont deux à deux disjoints, donc  $B_{n-1}$  et  $A_n$  le sont aussi. Donc par récurrence on a

$$\text{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \text{Card}(B_{n-1} \cup A_n) = \text{Card}(B_{n-1}) + \text{Card}(A_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \text{Card}(A_k) + \text{Card}(A_n) = \sum_{k=1}^n \text{Card}(A_k)$$

D'où l'hérédité.

- **Conclusion:** La propriété est initialisée et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

---

**Corollaire:**

Soit  $A$  un sous-ensemble quelconque d'un ensemble  $E$ .

On a

$$\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$$

**Démonstration :**

Le résultat découle immédiatement de la propriété précédente.  $A$  et  $\bar{A}$  étant deux ensembles disjoints.

### 1.3 Principe multiplicatif

**Définition:**

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles quelconques. On appelle produit cartésien de  $A$  et  $B$ , noté  $A \times B$ , l'ensemble des couples  $(x; y)$  tels que  $x \in A, y \in B$ .

**! Remarque**

Le produit cartésien d'un ensemble  $A$  dans lui-même sera noté  $A^2$ . Exemple pour les vecteurs  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

**Exemple :**

- Soient  $A = \{1; 2\}$  et  $B = \{3; 4\}$ . On a  $A \times B = \{(1; 3); (1; 4); (2; 3); (2; 4)\}$ .
- Soient  $A = \{a\}$  et  $B = \{3; 4\}$ . On a  $A \times B = \{(a; 3); (a; 4)\}$ .

Il est également possible de généraliser la définition de produit cartésien à un plus grand nombre d'ensemble.

**Définition:**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A_1, \dots, A_n$   $n$  ensembles quelconques. On appelle produit cartésien  $A_1 \times \dots \times A_n$  l'ensemble des  $n$ -uplets  $(x_1; \dots, x_n)$  où pour tout  $i \in \{1; \dots; n\}, x_i \in A_i$ .

**! Remarque**

Un 2-uplet est appelé un couple et un 3-uplet un triplet.

Attention à ne pas confondre les notations  $\{x_1; x_2\}$  et  $(x_1; x_2)$  !

**Propriété:**

- Soient  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $A_1, \dots, A_n$   $n$  ensembles quelconques.  
On a  $\text{Card}(A_1 \times \dots \times A_n) = \text{Card}(A_1) \times \dots \times \text{Card}(A_n)$ .
- Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles quelconques.  
On a  $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$
- Soit  $A$  un ensemble quelconque et  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
On a  $\text{Card}(A^n) = \text{Card}(A)^n$

**Démonstration :**

Le résultat découle immédiatement d'un argument de dénombrement.

---

Exemple:

Soit  $A = \{1; 2\}$  et  $B = \{a; b; c\}$ . On a  $|A| = 2$  et  $|B| = 3$  donc  $|A \times B| = 6$ .

En effet on a  $A \times B = \{(1; a); (1; b); (1; c); (2; a); (2; b); (2; c)\}$ .

## 2 Arrangements / Permutations et Combinaisons

### Définition:

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on définit "factoriel  $n$ " par :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n - 1) \times n$$

Exemple :

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

### 2.1 Arrangements

#### Définition:

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $A$  un ensemble de cardinal  $n$  et  $k \leq n$ . On appelle  $k$ -arrangement de  $A$  un  $k$ -uplet distinct de  $A$ . On notera  $\mathcal{A}_n^k$  le nombre de  $k$ -arrangement de  $A$ .

#### ! Remarque

Un arrangement de  $A$  peut être vu comme un tirage avec ordre et sans remise des éléments de  $A$ .

Exemple:

Si  $A = \{1; 2; 3; 4\}$ ,  $(1; 3; 4)$  et  $(1; 4; 3)$  sont deux 3-arrangements de  $A$ .

#### Propriété:

Soient  $A$  un ensemble de cardinal  $n$  et  $k \leq n$ . Le nombre de  $k$ -arrangement de  $A$  est donné par :  $\mathcal{A}_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}$

Démonstration:

Par un argument de dénombrement on a  $n$  possibilités pour choisir le premier élément puis  $n - 1$  pour le deuxième, ... , puis  $n - k + 1$  pour le  $k$ -ième. D'où le résultat.

### 2.2 Permutations

#### Définition:

Soit  $A$  un ensemble de cardinal  $n$ . On appelle permutation de  $A$  tout  $n$ -uplet d'éléments distincts de  $A$ . On not  $\mathcal{S}(A)$  l'ensemble des permutations de  $A$ .

#### ! Remarque

---

Une permutation est donc un  $n$ -arrangement.

---

**Propriété:**

Le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal  $n \in \mathbb{N}$  est  $n!$ .

Démonstration

Par un argument de dénombrement on a  $n$  possibilités pour choisir le premier élément puis  $n - 1$  pour le deuxième, ... , puis 1 pour le  $n$ -ième. D'où le résultat.

## 2.3 Combinaison

**Définition :**

Soit  $A$  un ensemble de cardinal  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \leq n$ . Une combinaison de  $k$  éléments de  $A$  est un sous-ensemble de  $A$  de cardinal  $k$ . On note  $\binom{n}{k}$  le nombre de combinaisons de  $k$  éléments parmi  $n$ .

**! Remarque**

Une combinaison ne prend pas en compte l'ordre des éléments.

---

**Propriété:**

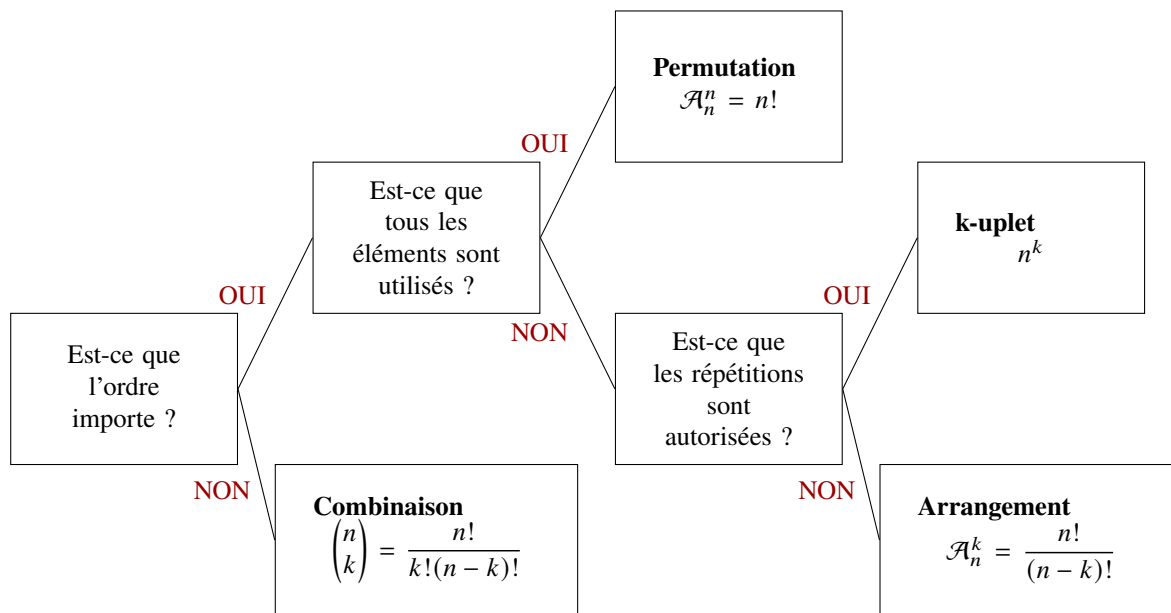
Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \leq n$ :

- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Si  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Démonstration :

La démonstration est laissée au lecteur. Il s'agit simplement d'arguments calculatoires.

### 3 Schéma récapitulatif



### 4 Exercice bilan

Un coffre fort contient un code à 4 chiffres allant de 0 à 9.

1. Combien de combinaison de codes existe-t-il ?
2. Combien de combinaison de codes ayant 4 chiffres différents existe-t-il ?