Chapitre 3 : Vecteurs, droites et plans de l’espace

Table des matières

Contenu

- Vecteurs de l'espace. Translations.
- Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace.
- Droites de l'espace. Vecteurs directeurs d'une droite. Vecteurs colinéaires.
- Caractérisation d'une droite par un point et un vecteur directeur.
- Plans de l'espace. Direction d'un plan de l'espace.
- Caractérisation d'un plan de l'espace par un point et un couple de vecteurs non colinéaires.
- Bases et repères de l'espace. Décomposition d'un vecteur sur une base.

1 Vecteurs de l'espace

Définition:
On appelle vecteur $\overrightarrow{u}$ un segment orienté caractérisé par:

- Sa direction (orientation de la droite).
- Son sens (direction de la flèche).
- Sa norme (longueur du segment noté $||\overrightarrow{u}||$).

Définition: *Somme de vecteurs*
On considère deux translations définies par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Faire succesivement ces deux translations revient à effectuer une seule translation définie par le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

Propriété: *Relation de Chasles*

Soient A,B et C trois points quelconques du plan, on a la relation suivante : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Démonstration : *(Hors programme)*
Par définition on a que $\overrightarrow{AC}$ est l'unique vecteur tel que $C = A + \overrightarrow{AC}$.
Par ailleurs $\overrightarrow{AB}$ l'unique vecteur tel que $B = A + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ l'unique vecteur tel que $C = B + \overrightarrow{BC}$.
On a donc $C = B + \overrightarrow{BC} = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = A + \overrightarrow{AC}$.
On a donc le résultat par unicité.

Propriété:
Soient k,k' deux réels et $\overrightarrow{u}$,$\overrightarrow{v}$ deux vecteurs quelconques, on a les relation suivante :

- $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$
- $(k + k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$
- $k(k'\overrightarrow{u}) = (kk')\overrightarrow{u}$
- $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Démonstration: *(Hors programme)*
Immédiat par définition d'un espace vectoriel.

Définition:
On dit que deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction.

Propriété:
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.

2 Droites et plans de l'espace

Définition:
Soit une droite $\mathcal{D}$ du plan et deux points A,B de cette droite.
On appelle vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite $\mathcal{D}$ tout vecteur non nul colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$

Définition:
Soient O, A ,B et C quatre points de l'espace et $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC}$.
On dira que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires lorsque les points O, A, B et C sont dans le même plan.

Propriété:
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne soient pas colinéaires. Ces trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si il existe une combinaison linéaire nulle non triviale de ces trois vecteurs :
$\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires $\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$

Démonstration: *(Hors programme)*
Les trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si ils appartiennent tous les trois à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. D'où le résultat.

Remarque

On dira que ces trois vecteurs sont linéairement indépendants sinon.
$\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont linéairement indépendants $\iff \left(\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \implies a = b = c = 0\right)$

Exemple:

Soit une pyramide $ABCD$ à base carré de sommet S. On a que $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$.
Ces trois vecteurs sont donc coplanaires.

Définition:
Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace.
Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3 Positions relatives de droites et de plans

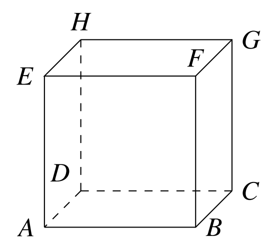
3.1 Positions relatives de deux droites

Propriété:
Soient d et d' deux droites de l'espaces. Il y a quatre cas possibles :

- d et d' sont parallèles : Elles n'ont aucun point en commun.
- d et d' sont sécantes : Elles ont un point en commun.
- d et d' sont confondues : Elles ont une infinité de points en commun.
- d et d' sont non-coplanaires : Elles n'ont aucun point en commun.

Démonstration:
La preuve sera laissée au lecteur. Il s'agit d'écrire ce que cela signifie qu'être parallèles, sécants...
Exemple:
Soit $ABCDEFGH$ un cube. On a :

- $(EF) \cap (HF) = \{F\}$
- $(EF) \cap (HG) = \emptyset$
- $(EF) \cap (HB) = \emptyset$



Remarque

On vérifie tout d'abord si les deux droites sont coplanaires (ou pas) et ensuite on regarde si leur vecteurs directeurs sont colinéaires (ou pas).

Exercice:
Dans le même cube que l'exemple précédent. I, J et L sont les milieux respectifs des arêtes $[EH]$, $[FG]$ et $[GC]$. O et K sont deux points tels que $\overrightarrow{IO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{DK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$. Etudier les positions relatives des couples de droites suivants :

- (IO) et (DK)
- (BJ) et (EF)
- (JL) et (BC)

3.2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Propriété:
Soient d et $\mathcal{P}$ une droite et un plan de l'espace. Il y a 3 cas possibles :

- d et $\mathcal{P}$ sont parallèles : Ils n'ont aucun point en commun.
- d et $\mathcal{P}$ sont sécants : Ils ont un point en commun.
- d est contenue dans $\mathcal{P}$: Ils ont une infinité de points en commun donnés par la droite d.

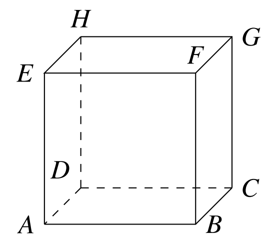
Démonstration:
La preuve sera laissée au lecteur. Il s'agit d'écrire ce que cela signifie qu'être parallèles, sécants...

Remarque

On vérifie tout d'abord si le vecteur directeur peut s'écrire en fonction des vecteurs du plan.

Exemple:
Soit $ABCDEFGH$ un cube. On a :

- $(HC) \cap (ABC) = \{C\}$
- $(AB)//(DCG)$
- $(HC) \subset (DCG)$



3.3 Positions relatives de deux plans

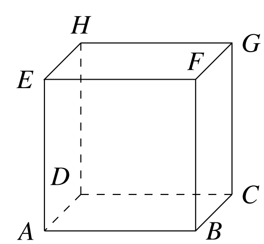
Propriété:
Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de l'espace. Il y a 3 cas possibles :

- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles : Ils n'ont aucun point en commun.
- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants : Ils ont une infinité de points en commun donnés par une droite d.
- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus : Ils ont une infinité de points en commun donnés par le plan $\mathcal{P}$.

Démonstration:
La preuve sera laissée au lecteur. Il s'agit d'écrire ce que cela signifie qu'être parallèles, sécants...

Exemple:
Soit $ABCDEFGH$ un cube. On a :

- $(EFG)//(ABC)$
- $(ABC) \cap (DCG) = (DC)$
- $(ABC) \cap (ABC) = (ABC)$



Exercice :
Dans le même cube que précédemment, I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$ et $[CD]$. Etudier les positions relatives des couples de plans suivants :

- (AIE) et (BIG)
- (ADI) et (BJC)
- (HEF) et (BJC)

4 Base et coordonnées

Définition:

On appelle base de l'espace la donnée d'un triplet $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de vecteurs non coplanaires

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur quelconque de l'espace. $\overrightarrow{u}$ s'écrit de manière unique dans cette base sous la forme :
$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Remarque

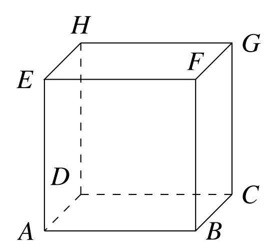
Il n'y a pas unicité d'une base !
Trois vecteurs linéairement indépendant forment une base de l'espace $\mathbb{R}^3$.
On parlera de repère si on rajoute à ce triplet la donnée d'une origine O.

Exercice :

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre :

1. On pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AE}$. Justifier que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de l'espace.
2. Exprimer les vecteurs suivants en fonction de $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.
   En déduire leurs coordonnées dans le base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

   a. $\overrightarrow{AH}$ b. $\overrightarrow{BH}$



Propriété:

Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de ce repère et k un réel quelconque.

On a:

- $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \iff x = x', y = y', z = z'$.
- $\overrightarrow{u+v} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$.
- $k\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$.
- Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace.
  - Le milieu du segment $[AB]$ est donné par $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$
  - $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

5 Exercice bilan