

Chapitre 4 : Limites de fonctions

Table des matières

Chapitre 4 : Limites de fonctions	1
CARPENTIER Axel	
Contenu	2
1 Limite d'une fonction en $\pm\infty$	3
1.1 Limite infinie	3
1.2 Limite finie et asymptote horizontale	3
1.3 Interprétation graphique	4
2 Limite d'une fonction en un réel a	5
2.1 Limite infinie	5
2.2 Limite finie	5
2.3 Interprétation graphique	6
3 Opérations sur les limites	6
4 Limites et comparaison	7
4.1 Limite infinie	7
4.2 Limite finie	8
4.3 Croissances comparées	8
5 Exercice bilan	9

Contenu

- Limite finie ou infinie d'une fonction en $+\infty$, en $-\infty$, en un point. Asymptote parallèle à un axe de coordonnées.
- Limites faisant intervenir les fonctions de référence étudiées en classe de première : puissances entières, racine carrée, fonction exponentielle.
- Limites et comparaison.
- Opérations sur les limites.

1 Limite d'une fonction en $\pm\infty$

1.1 Limite infinie

Définition :

- La fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand. Autrement dit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \exists X > 0, x > X \implies f(x) > A$$

- La fonction f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $] -\infty; A]$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand. Autrement dit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A > 0, \exists X > 0, x < X \implies f(x) < A$$

! Remarque

- On a des définitions équivalentes pour $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- Pour les limites infinies, on a donc quatre cas possible $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Propriété:

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ -\infty & \text{si } n \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases}$

Démonstration:

La démonstration est laissée au lecteur.

1.2 Limite finie et asymptote horizontale

Définition:

La fonction f tend vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[l - \epsilon; l + \epsilon]$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand. Autrement dit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \iff \forall \epsilon > 0, \exists X > 0, x \geq X \implies |f(x) - l| \leq \epsilon$$

! Remarque

On a une définition équivalente pour $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.

Exemple:

On pourra considérer la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x} + 1$.

Propriété:

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Démonstration:

La démonstration est laissée au lecteur.

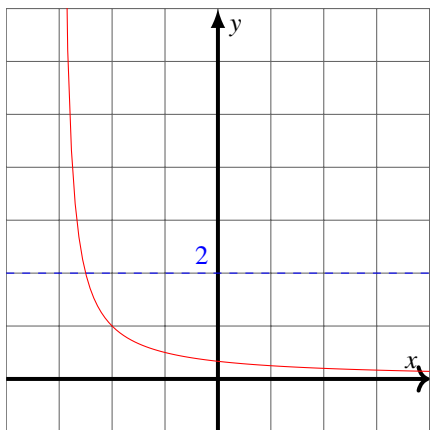
Définition:

La droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $\pm\infty$ si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$.

Exemple:

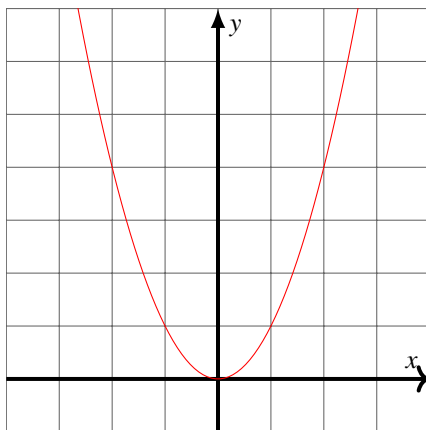
On pourra considérer la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} + 1$.

1.3 Interprétation graphique



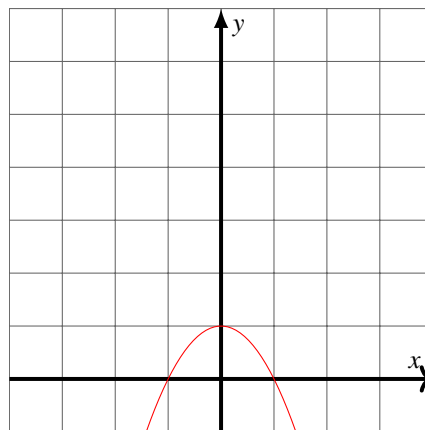
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Il n'y a pas d'asymptote.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Il n'y a pas d'asymptote.

2 Limite d'une fonction en un réel a

2.1 Limite infinie

Définition :

- La fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si tout intervalle de la forme $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a . Autrement dit :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \exists \eta > 0, |x - a| < \eta \implies f(x) > A$$

- La fonction f tend vers $-\infty$ quand x tend vers a si tout intervalle de la forme $] -\infty; A]$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a . Autrement dit :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \iff \forall A > 0, \exists \eta > 0, |x - a| < \eta \implies f(x) < A$$

Définition:

La droite d'équation $x = l$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.

Exemple:

On pourra considérer la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

2.2 Limite finie

Définition:

La fonction f tend vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a si tout intervalle de la forme $[l - \epsilon; l + \epsilon]$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a . Autrement dit :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - a| < \eta \implies |f(x) - l| \leq \epsilon$$

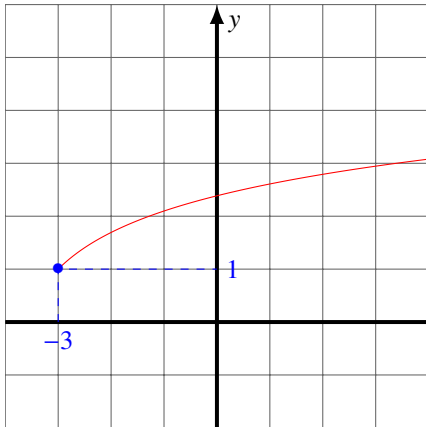
Exercice:

Soit le tableau de variation d'une certaine fonction f :

x	$-\infty$	-5	-3	0	$+\infty$
$f(x)$	-2	$+\infty$	$+\infty$	-4	3

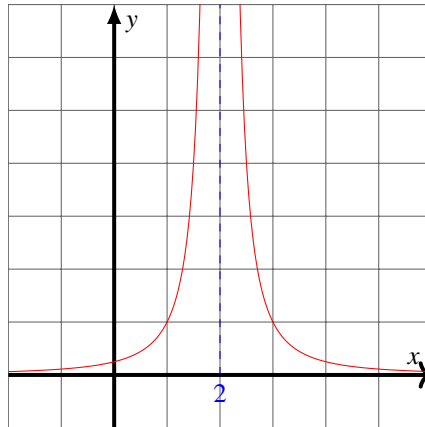
- Déterminer les asymptotes verticales en précisant leur équation.
- Déterminer les asymptotes horizontales en précisant leur équation.
- Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

2.3 Interprétation graphique



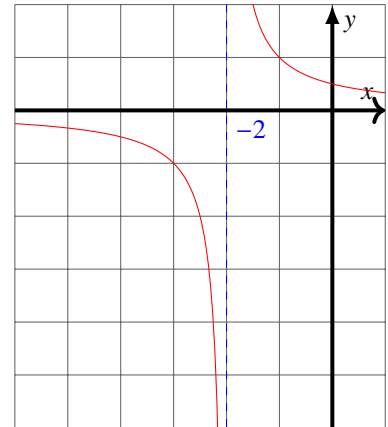
$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 1$$

Il n'y a pas d'asymptote.



$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$

La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.



$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$$

La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

3 Opérations sur les limites

En analogie à la dérivation (et à d'autres domaines des mathématiques), il est possible de déduire d'un résultat d'une somme/produit/quotient à partir de chaque opérateur. C'est-à-dire, ici, il est possible de déterminer la limite d'une somme/produit/quotient de fonctions à partir de la connaissance de la limite de chaque fonction.

Soient f, g deux fonctions quelconques et l, l' deux réels quelconques.

Propriété:

On récapitule toute les informations dans le tableau ci-dessous selon les différents cas.

$\lim f =$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim g =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g =$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I	$-\infty$
$\lim f \times g =$	$l \times l'$	$+\infty$ F.I si $l = 0$	$-\infty$ F.I si $l = 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{f}{g} =$	$\frac{l}{l'}$ si $l' \neq 0$	0	0	F.I	F.I	F.I

Démonstration:

La démonstration est laissée au lecteur.

! Remarque

Il existe trois formes indéterminées fondamentales :

- "Additionner" $+\infty$ avec $-\infty$.
- "Multiplier" $\pm\infty$ par 0.
- "Diviser" $\pm\infty$ par $\pm\infty$ ou 0 par 0.

Sur le même modèle que les suites, lorsqu'on a une forme indéterminée, cela signifie qu'on ne peut pas conclure directement, il faut donc lever l'incertitude en factorisant ou en développant.

Exemple:

$$\text{Soit } h : x \mapsto \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{(2 + \frac{1}{x})(1 + x^2)}$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x^2 = +\infty$.

Par règle du produit on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \frac{1}{x})(1 + x^2) = +\infty$. Par ailleurs on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^3} = 1$ donc par règle du quotient on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

Exercice:

Déterminer les limites des fonctions suivantes aux valeurs demandées.

1. $f : x \mapsto 2x + 1 - \frac{1}{x^2}$ en 0 et $\pm\infty$.

2. $g : x \mapsto \frac{4x}{4 - x}$ en 0 et 4.

Propriété:

En $\pm\infty$, la limite d'une fonction polynomiale est entièrement déterminée par son monome de plus haut degré.

Démonstration:

La démonstration est laissée au lecteur.

Exemple:

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x + 1}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{2x} = +\infty.$$

4 Limites et comparaison

4.1 Limite infinie

Propriété:

Soient f, g deux fonctions telles que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq g(x)$ et $a \in \bar{I}$.

- Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$.

Démonstration:

Démontrons le premier point, le deuxième se fera sur le même modèle.

Supposons donc que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$. On a alors :

Pour tout $A > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour $|x - a| < \eta$ alors $g(x) > A$.

Or on a par hypothèse que pour tout x , $f(x) \geq g(x)$.

D'où $f(x) \geq g(x) > A$ donc par définition on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Exercice:

Déterminer la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto x^2 + \cos(x)$.

4.2 Limite finie

Théorème :

Soient f , g et h trois fonctions définies sur I telles que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l \in \mathbb{R}$

On a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Démonstration:

La démonstration repose sur le même principe que son équivalent pour des suites mais avec des disjonctions de cas supplémentaires.

Exercice:

Déterminer la limite en $+\infty$ de $g : x \mapsto 1 + \frac{2 + \sin(x)}{x^2 + 1}$.

4.3 Croissances comparées

Propriété:

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$

Démonstration:

On pourrait se contenter de montrer cette propriété pour $n = 1$.

Démontrons le premier point dans le cas général.

En montrant que pour tout $x > 0$, $\frac{x}{(n+1)!} \leq \frac{e^x}{x^n}$, on aura minoré ce qui nous intéresse par une fonction tendant vers $+\infty$ et donc on obtiendra donc le résultat souhaité d'après une propriété précédente. Montrons donc cette inégalité.

On a $\frac{x}{(n+1)!} \leq \frac{e^x}{x^n} \iff (n+1)!e^x - x^{n+1} \geq 0$.

Notons $\phi(x) = (n+1)!e^x - x^{n+1}$, on a $\phi^{(n)}(x) = (n+1)!(e^x - 1) > 0$ donc $\phi^{(n-1)}$ est strictement croissante.

Par ailleurs, $\phi^{(n-1)}(0) = (n+1)! > 0$ donc $\phi^{(n-2)}$ est strictement croissante.

Par récurrence immédiate on a que ϕ est strictement croissante et $\phi(0) = (n+1)! > 0$.

On a donc bien l'inégalité souhaitée et donc le résultat.

5 Exercice bilan

Soit $f : t \mapsto (12+t)e^{-0,6t}$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer les limites en f en $\pm\infty$.