Chapitre 5 : Succession d'épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli

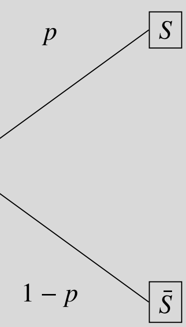
Table des matières

Contenu

- Modèle de la succession d'épreuves indépendantes : la probabilité d'une issue $(x_1, \dots, x_n)$ est égale au produit des probabilités des composantes x_i. Représentation par un produit cartésien, par un arbre.
- Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli.
- Schéma de Bernoulli : répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes.
- Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$: loi du nombre de succès. Expression à l'aide des coefficients binomiaux.

1 Epreuve, loi et schéma de Bernoulli

Définition:
On appelle épreuve de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$, une expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles, un succès S de probabilité p et un échec $\bar{S}$ de probabilité $1 - p$.
On peut représenter la situation par un arbre de probabilité comme suit:



Exemple:
Jeu du pile ou face, test de fiabilité ...

Définition :
On dit qu'une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0; 1]$, noté $X \sim \mathcal{B}(p)$, lorsque $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.

Remarque

On attribue, par convention, la valeur 1 au succès de l'épreuve de Bernoulli.

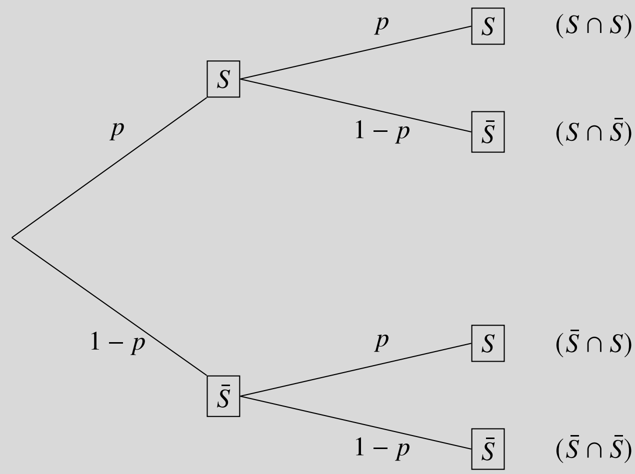
Propriété:
Soit $p \in [0; 1]$ et $X \sim \mathcal{B}(p)$. On a $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$.

Démonstration:
On a $\mathbb{E}(X) = 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + 0 \times \mathbb{P}(X = 0) = p$ et $\mathbb{V}(X) = (1 - p) \times \mathbb{P}(X = 1) + (0 - p) \times \mathbb{P}(X = 0) = p(1 - p)$

Exemple:
Si $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{6})$, on a $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36}$

On peut généraliser ce principe d'une épreuve de Bernoulli en répétant une expérience aléatoire. Exemple : Lancer plusieurs fois la pièce à pile ou face.

Définition:
On appelle schéma de Bernoulli de paramètres n et p une expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois, de manières indépendantes et identiques, une épreuve de Bernoulli de paramètre p.
On représente ce schéma par un arbe ou chaque noeud a deux branches :



! Remarques Importantes

- Dans la définition, le terme "indépendant" signifie que le résultat d'une épreuve de Bernoulli d'influera pas sur les suivantes. Exemple : A pile ou face, le résultat du 1er lancer ne détermine pas le résultat du 2ème lancer.
- Comment lire cet arbre ?
  - La probabilité d'une issue représentée par un chemin est le produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.
  - La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités de tous les chemins menant à cet évènement.

Exercice:
On tire successivement et avec remise 3 cartes dans un jeu de 32 cartes. On associe le succès au tirage d'un as.

1. Montrer qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. On note X la variable aléatoire associé au nombre d'as tirés. Donner la loi de probabilité de X

2 Loi Binomiale

2.1 Définition et premières propriétés

Définition:
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$. On dit qu'une variable suit une loi bibomiale de paramètre n et p, noté $X \sim \mathcal{B}(n; p)$, lorsque X compte le nombre de succès obtenus pour n répétitions d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

Définition:
Soient $k \leq n$, $p \in [0; 1]$. Une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(n; p)$ si on a $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Démonstration :
Ces deux définitions sont bien équivalentes.
En effet, on répète n épreuves de Bernoulli de paramètre p. On cherche la probabilité d'obtenir k succès. Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les k expériences à succès parmi les n. Il y a k expériences à succès de probabilité p d'où p^k. Il y a donc $n-k$ expériences à échecs de probabilité $1-p$ d'où $(1-p)^{n-k}$. On a donc bien le résultat.
Exemple:
Si $X \sim \mathcal{B}(5; \frac{1}{6})$, on a $\mathbb{P}(X = 2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3 = 10 \times \frac{1}{36} \times \frac{125}{216}$

Propriété:
Soit $X \sim \mathcal{B}(n; p)$. On a pour tout $k \leq n$:

- $\mathbb{P}(X \leq k) = 1 - \mathbb{P}(X > k)$
- $\mathbb{P}(X \geq k) = 1 - \mathbb{P}(X < k)$

Démonstration: *(Hors programme)*
Les événements $\{X \leq k\}$ et $\{X > k\}$ forment un système complet d'événement.

! Remarque

On utilisera cette propriété surtout dans le cas $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X < 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - (1-p)^n$

Exercice:
On lance six fois une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où l'on a obtenu face.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X.
2. Déterminer $\mathbb{P}(X = 0)$ et $\mathbb{P}(X = 1)$.
3. Déterminer $\mathbb{P}(X \leq 1)$ et $\mathbb{P}(X \leq 4)$.
4. Déterminer $\mathbb{P}(X \geq 5)$.

2.2 Espérance et variance

Propriété:
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0;1]$ et $X \sim \mathcal{B}(n;p)$. On a $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.

Démonstration:
On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np(1-p) \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k-1} \\
&= np(1-p) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-j} \\
&= np(1-p) \text{ par binôme de Newton}
\end{aligned} \tag{1}$$

On effectue de même avec la variance mais avec un peu plus de calcul...

3 Exercice bilan

On considère une situation où la probabilité de réussir un entretien d'embauche est égale à 0, 12. On interroge dix candidats et on suppose leur embauche indépendante de celle des autres candidats. On note X la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui ont réussi leur entretien d'embauche parmi les dix.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X.
2. Déterminer $\mathbb{P}(X = 9)$.
3. Déterminer $\mathbb{P}(X < 4)$.
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
5. Calculer $\mathbb{V}(X)$ et $\sigma(X)$.