

Chapitre 6 : Fonction logarithme

Table des matières

Chapitre 6 : Fonction logarithme	1
CARPENTIER Axel	
Contenu	2
1 Logarithme népérien	3
1.1 Définition et premières propriétés	3
1.2 Etude de la fonction logarithme	4
2 Propriétés algébriques du logarithme	6
3 Fonctions de la forme $\ln(u)$	7
4 Exercice bilan	8

Contenu

- Fonction logarithme népérien, notée $\ln$, construite comme réciproque de la fonction exponentielle.
- Propriétés algébriques du logarithme.
- Fonction dérivée du logarithme, variations.
- Limites en 0 et en $+\infty$, courbe représentative. Lien entre les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle.
- Croissance comparée du logarithme népérien et de $x \mapsto x^n$ en 0 et en $+\infty$.

1 Logarithme népérien

1.1 Définition et premières propriétés

Définition:

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle logarithme népérien de a l'unique solution de l'équation $e^x = a, x \in \mathbb{R}$. Autrement dit on a:

$$e^x = a \iff x = \ln(a)$$

! Remarque

- On a $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.
- On notera $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïtés.
- Le logarithme népérien d'un nombre réel nul ou négatif n'existe pas :
- (*Hors programme*) L'unicité du logarithme népérien découle de la bijectivité de la fonction exponentielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété :

- Soit $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$

Démonstration:

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, par définition du logarithme népérien de x .
- Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > 0$ et d'après le premier point on a $e^{\ln(e^x)} = e^x$ et par stricte croissante de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ on a donc bien le résultat.

Exemple:

- $e^{\ln(5)} = 5$
- $\ln(e^{-0,1}) = -0,1$
- $\ln(\sqrt{e}) = \ln(e^{0,5}) = 0,5$

Exercice:

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $e^{3x+2} = 5$

1.2 Etude de la fonction logarithme

Définition:

On appelle fonction logarithme népérien la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\ln : x \mapsto \ln(x)$.

Propriété:

La fonction logarithme est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Démonstration:

Il y a deux points à montrer, que la fonction logarithme est dérivable et que sa dérivée est bien de la bonne expression. Seul le deuxième point sera ici au programme.

- Montrons que $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit donc $x > 0$, on veut montrer que le taux d'accroissement est convergent pour tout x :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{x} + o(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} + o(1) \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned} \tag{1}$$

On en conclut donc que $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a une expression de sa dérivée.

- Soit f la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = e^{\ln(x)}$.

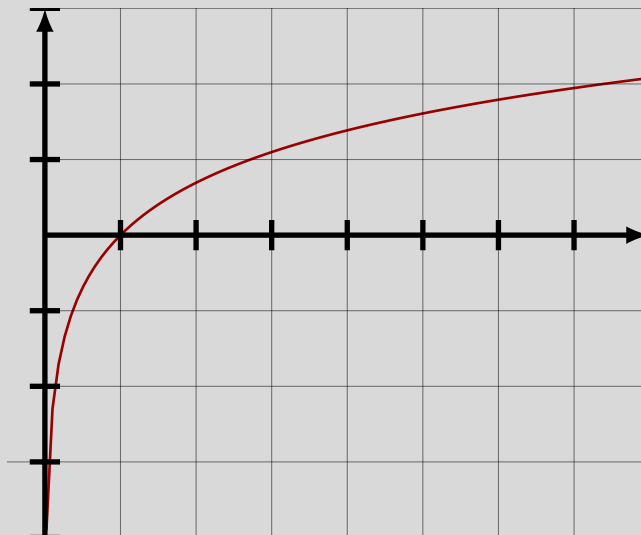
On a $f'(x) = \ln'(x) \times f(x)$. On conclut d'après une propriété précédente.

Exercice:

Etudier sur $\mathbb{R}_+^*$ les variations de la fonction $f : x \mapsto x \ln(x)$.

Propriété:

- La fonction logarithme est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On a de plus :
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$



Démonstration :

- La dérivée de la fonction logarithme est la fonction inverse qui est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où le résultat du premier point.
- On en déduit les résultats de limite car $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$.

Propriété:

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$:

- $a = b \iff \ln(a) = \ln(b)$
- $a < b \iff \ln(a) < \ln(b)$

Démonstration :

Le premier point découle immédiatement de la définition du logarithme népérien. Le deuxième point découle de la stricte croissance de la fonction logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème: Croissances comparées

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$

Démonstration:

- Posons $X = \ln(x)$ (qui est un changement de variable viable par bijectivité) on a alors $x^n \ln(x) = X e^{nX}$. D'où :
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = \lim_{X \rightarrow -\infty} X e^{nX} = 0.$

- Posons $X = \frac{1}{x}$ (qui est toujours un changement de variable viable) on a alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = \lim_{X \rightarrow 0^+} -X^n \ln(X) = 0 \text{ d'après le point précédent.}$$

! Remarque

Le théorème précédent signifie que la croissance de $x \mapsto x^n$ est plus rapide que $x \mapsto \ln(x)$.

2 Propriétés algébriques du logarithme

Propriété:

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Démonstration:

On a $a = e^{\ln(a)}$ et $b = e^{\ln(b)}$ et $a \times b = e^{\ln(a \times b)}$.

Or $a \times b = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = e^{\ln(a) + \ln(b)}$.

D'où $e^{\ln(a \times b)} = e^{\ln(a) + \ln(b)}$ et on a donc le résultat par bijectivité de l'exponentielle.

Corollaire:

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$\bullet \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\bullet \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\bullet \ln(a^n) = n \ln(a)$$

Démonstration :

La démonstration est laissée au lecteur, tout repose sur la propriété précédente.

Exercice:

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$\bullet A = \ln(1000) - \ln(0,1) + \ln(0,01)$$

$$\bullet B = \ln(32) - 7 \ln(2) + \ln\left(\frac{1}{8}\right)$$

2. Dans chacun des cas, déterminer le plus petit entier n solution de l'inéquation :

$$\bullet 0,92^n \leq 0,75$$

$$\bullet 0,2 \geq \left(1 - \frac{9}{100}\right)^n$$

3. Résoudre le système d'équation :
$$\begin{cases} \ln(x\sqrt{y}) = 9 \\ 2 \ln(x) + \ln(y^3) = 0 \end{cases}$$

3 Fonctions de la forme $\ln(u)$

Propriété:

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $\forall x \in I, u(x) > 0$. La fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est alors dérivable sur I et on a $\forall x \in I, (\ln(u))'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Démonstration: (Hors programme)

Considérons une telle fonction u et montrons alors que $\ln(u)$ est dérivable en utilisant la définition du taux d'accroissement. Soit donc $x \in I$:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(u(x+h)) - \ln(u(x))}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(u(x) + hu'(x) + o(h)) - \ln(u(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + h \frac{u'(x)}{u(x)} + o(h)\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \frac{u'(x)}{u(x)} + o(h)}{h} \quad (2) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u'(x)}{u(x)} + o(1) \\ &= \frac{u'(x)}{u(x)} \end{aligned}$$

On a donc bien le résultat souhaité.

! Remarque

On pourra retenir que si $u > 0$, $[\ln(u)]' = \frac{u'}{u}$.

Propriété:

Soit u une fonction strictement positive sur un intervalle I . La fonction $\ln(u)$ a le même sens de variation que u .

Démonstration:

Supposons que u est croissante sur I . On a alors pour tout $x \in I$:

$$(\ln(u))'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} > 0 \text{ par hypothèse sur } u. \text{ D'où le résultat.}$$

La preuve repose sur les mêmes arguments lorsque u est décroissante.

4 Exercice bilan

Soit $f : x \mapsto x + \frac{\ln(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On note C la courbe représentative de la fonction f .

1. Soit $g : x \mapsto x^2 + 1 - \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - a. Etablir le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - b. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
2.
 - a. Déterminer la limite en 0 de la fonction f .
 - b. Déterminer f' .
 - c. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - d. Déterminer le point A de la courbe C en lequel la tangente $\mathcal{T}$ est parallèle à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.