Chapitre 7 : Continuité, dérivabilité et convexité

Table des matières

Contenu

- Fonction continue en un point (définition par les limites), sur un intervalle. Toute fonction dérivable est continue.
- Image d'une suite convergente par une fonction continue.
- Théorème des valeurs intermédiaires. Cas des fonctions continues strictement monotones.
- Composée de deux fonctions, notation $v \circ u$. Relation $(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$ pour la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables.
- Dérivée seconde d'une fonction.
- Fonction convexe sur un intervalle : définition par la position relative de la courbe représentative et des sécantes. Pour une fonction deux fois dérivable, équivalence admise avec la position par rapport aux tangentes, la croissance de f', la positivité de f''.
- Point d'inflexion.

1 Rappels de dérivation

On a ci-dessous un récapitulatif de dérivation des fonctions usuelles :

	Fonction f	**Dérivée** f'
Constante	$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$ sur $I = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$ sur $I = \mathbb{R}$
Linéaire	$f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$ sur $I = \mathbb{R}$	$f'(x) = a$ sur $I = \mathbb{R}$
Carré	$f(x) = x^2$ sur $I = \mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$ sur $I = \mathbb{R}$
Puissance	$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ sur $I = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$ sur $I = \mathbb{R}$
Inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$ sur $I = \mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ sur $I = \mathbb{R}^*$
Racine carrée	$f(x) = \sqrt{x}$ sur $I = \mathbb{R}_+$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$
Cosinus	$f(x) = \cos(x)$ sur $I = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$ sur $I = \mathbb{R}$
Sinus	$f(x) = \sin(x)$ sur $I = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$ sur $I = \mathbb{R}$
Exponentielle	$f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$ sur $I = \mathbb{R}$
Logarithme	$f(x) = \ln(x)$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \frac{1}{x}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$

On a ci-dessous un récapitulatif d'opérations de dérivation :

Fonction	**Dérivée**
ku, $k \in \mathbb{R}$	ku'
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$u^n, n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$

Exercice:

Soit $f : x \mapsto 1 - \dfrac{4x-3}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$. Etablir le tableau de variations de f.

2 Continuité

2.1 Fonctions continues

Définition:
Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- f est continue en a si et seulement si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
- f est continue sur I si et seulement si pour tout $a \in I$, f est continue en a.

Remarque

Intuitivement on peut se dire qu'une fonction est continue si on peut la tracer en un seul morceau.

Exercice:

Montrer que la fonction $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 2 \\ 3 \quad \text{si } x = 2 \\ x^2 \text{ si } x > 2 \end{cases}$ n'est pas continue en 2.

Propriété :
Toute fonction dérivable sur un intervalle I et continue sur I.

Démonstration:
Soit f une fonction dérivable sur I, soient $x \neq a \in I$. On a :
$f(x) - f(a) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a)$.
Par propriété algébrique sur les limites et par dérivabilité de f sur I on a :
$\lim\limits_{x \to a} (f(x) - f(a)) = f'(a) \times 0 = 0$.
D'où le résultat.

Propriété:

- Les fonctions de références sont continues sur leur intervalle de définition.
- La somme et le produit de fonctions continues sur un intervalle I sont continues sur cet intervalle.
- Si f et g sont continues sur I et que g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.
- Si $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow K$ sont continues alors $g \circ f$ est continue sur I.

Démonstration: *(Hors programme)*

- Laissée au lecteur.
- Soient f et g continues sur I et $x \neq a \in I$, on a :
  $|(f+g)(x) - (f+g)(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)|$ par inégalité triangulaire.
  et $|(fg)(x) - (fg)(a)| \leq |f(x)g(x) - f(x)g(a)| + |f(x)g(a) - f(a)g(a)| = |f(x)||g(x) - g(a)| + |g(a)||f(x) - f(a)|$
  Or f et g sont continues en a d'où :
  $\lim\limits_{x \to a} ((f+g)(x) - (f+g)(a)) = 0$ et $\lim\limits_{x \to a} ((fg)(x) - (fg)(a)) = 0$.
- Les deux derniers points reposent sur le même principe que le point précédent en ajoutant puis retirant une quantité puis en concluant par l'inégalité triangulaire.

Exercice:
Soit $f : x \mapsto x^2 + \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème:
Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et k tels que $f(a) \leq k \leq f(b)$. Alors il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$.

Démonstration: *(Hors programme)*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies telles que :

- Pour $n \in \{0, 1\}$, $a_0 = a_1 = a$ et $b_0 = b_1 = b$
- Pour $n > 1$, posons $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.
  - Si $f(c_n) \geq k$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.
  - Si $f(c_n) \leq k$ alors $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété :
$\mathcal{P}(n)$: "$a \leq a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq b$, $f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$ et $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}}$"

- **Initialisation :**
  $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies par construction des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.
  - Si $f(c_n) \geq k$ alors on a $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.
    On a donc $a \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \leq b_n \leq b$ par hypothèse de récurrence.
    Par ailleurs on a $f(a_{n+1}) = f(a_n) \leq k$ par hypothèse de récurrence et $f(b_{n+1}) = f(c_n) \geq k$ par hypothèse de cas.
    Enfin on a $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2} = \dfrac{b-a}{2^n}$ par hypothèse de récurrence.
  - Si $f(c_n) \leq k$, la preuve est identique par symétrie.
- **Conclusion :**
  La propriété est initialisé et héréditaire elle est donc vraie pour tout n.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et leur différence tend vers 0. Ces deux suites sont donc adjacentes et donc convergent vers une même limite $c \in [a, b]$. On a donc d'après l'inégalité $f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$, par passage à la limite et d'après le théorème des gendarmes on a donc bien le résultat.

Corollaire:
Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone et k tels que $f(a) \leq k \leq f(b)$. Alors il existe un unique $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Démonstration: *(Hors programme)*
L'existence découle du théorème précédent, l'unicité est laissée au lecteur, en effet f est bijective de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$...

Exercice:
Soit $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$. Quel est le nombre de solutions l'équation $f(x) = 4$?

2.3 Applications aux suites

Propriété:
Soit f une fonction continue sur I et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I convergeant vers $a \in I$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.

Démonstration: *(Hors programme)*
Soit $a \in I$, par hypothèse on sait que f est continue en a et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.
Soit $\epsilon > 0$, il existe un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - a| \leq \epsilon$.
Par ailleurs, soit $\epsilon' > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon'$.

Posons $\eta = \epsilon$ on a alors par association de ces deux définitions de limites que :
$\forall \epsilon' > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |f(u_n) - f(a)| \leq \epsilon.$
D'o ù le résultat.
Exemple:

Soit $f : x \mapsto (x+1)^2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 + \dfrac{1}{n+1}$. On a que f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(2) = 9$.

Théorème : *du point fixe*
Soit $f : I \longrightarrow I$ continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in I$ alors l est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.

Démonstration :
D'après la propriété précédente on a :
$l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$

Exercice:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3}{u_n + 1}$. On admet que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 3]$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3 Compléments sur la dérivation

3.1 Dérivée d'une composée

Définition:
Soient $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow K$ deux fonctions. On appelle fonction composée de f par g la fonction $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ définie sur I et à valeurs dans K.

Exemple:

Si $f(x) = x^4$ et $g(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ alors on a :
$f \circ g(x) = f(g(x)) = g(x)^4 = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^4$ et $g \circ f(x) = g(f(x)) = 1 + \dfrac{1}{f(x)} = 1 + \dfrac{1}{x^4}$

Propriété:
Soient $u : I \longrightarrow J$ et $v : J \longrightarrow K$ deux fonctions dérivables. Alors $v \circ u$ est dérivable et on a :
$\forall x \in I, (v \circ u)'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x).$

Démonstration:
La démonstration est laissée au lecteur, il s'agit simplement de définir le taux d'accroissement et de modifier légérèment sa forme pour avoir le résultat souhaité.
Exercice:
Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

- $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x - 10}$
- $g : x \mapsto \left(\dfrac{3x+2}{x-3}\right)^3$
- $h : x \mapsto \dfrac{x^2 - 6}{2x + 5}$

3.2 Dérivée seconde

Définition:
Soit f une fonction dérivable sur I dont la dérivée f' est également dérivable sur I, notée f''. On a donc que f'' est la dérivée seconde de f sur I.

Remarque

On peut très bien dériver une fonction plusieurs fois (à condition que cela soit bien possible !). On note alors $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$ la dérivée n-ième de f, lorsque celle-ci existe.

Exercice:
Soit $f : x \mapsto 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer f''.

4 Convexité

4.1 Fonctions convexes / concaves

Définition:
Soit f une fonction dérivable sur I et C_f sa courbe représentative.

- f est convexe sur I si la courbe C_f est située au dessus de de toute ses tangentes.
- f est concave sur I si la courbe C_f est située en dessous de de toute ses tangentes.

Exemple:
La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ tandis que la fonction logarithme est concave sur $\mathbb{R}$.

Propriété:
Soit f une fonction dérivable sur I.

- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

Démonstration: *(Hors programme)*
Ce résultat découle plus ou moins rapidement du théorème des trois pentes qui est une définition équivalente de la convexité d'une fonction.

Propriété:
Soit f une fonction deux fois dérivable sur I.

- f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I.

Démonstration:
Ce résultat découle immédiatement de la propriété précédente.

Exercice:
Etudier la convexité / concavité de la fonction $f : x \mapsto x^5 - 5x^4$ sur $\mathbb{R}$.

4.2 Point d'inflexion

Définition:
Soit f une fonction dérivable sur I et C_f sa courbe représentative. S'il existe un point A de la courbe C_f tel que la courbe coupe sa tangente en ce point, alors on dit que A est un point d'inflexion.

Propriété:
Soit f une fonction deux fois dérivable sur I. La courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en a.

Exercice:
La fonction $f : x \mapsto x^5 - 4x^4 - 40x + 120$ possède-t-elle des points d'inflexions ? Si oui, les préciser.

5 Exercice bilan

Soit $f(x) = x(2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2)$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Déterminer $f''(x)$.
3. Etudier la convexité de f sur $]0; +\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.