

Chapitre 8 : Orthogonalité et distance dans l'espace

Table des matières

Chapitre 8 : Orthogonalité et distance dans l'espace	1
CARPENTIER Axel	
Contenu	2
1 Rappels de première sur le produit scalaire dans le plan	3
1.1 Expressions et propriétés du produit scalaire	3
1.2 Projection orthogonale	4
1.3 Autres expressions du produit scalaire	4
1.4 Equation d'une droite et vecteur normal	5
2 Orthogonalité et produit scalaire dans l'espace	6
2.1 Orthogonalité dans l'espace	6
2.2 Produit scalaire dans l'espace	7
3 Géométrie analytique dans l'espace	8
3.1 Distance dans l'espace	8
3.2 Equation paramétrique d'une droite	8
3.3 Equation cartésienne d'un plan	9
4 Projection orthogonale	10
4.1 Projection orthogonale d'un point sur un plan ou sur une droite	10
4.2 Distance d'un point à un plan ou une droite	11
5 Exercice bilan	12

Contenu

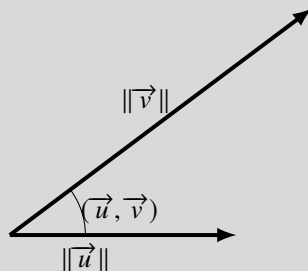
- Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace. Bilinéarité, symétrie.
- Orthogonalité de deux vecteurs. Caractérisation par le produit scalaire.
- Base orthonormée, repère orthonormé.
- Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expressions du produit scalaire et de la norme. Expression de la distance entre deux points.
- Développement de $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$, formules de polarisation.
- Orthogonalité de deux droites, d'un plan et d'une droite.
- Vecteur normal à un plan. Étant donné un point A et un vecteur non nul $\vec{n}$, plan passant par A et normal à $\vec{n}$.
- Projeté orthogonal d'un point sur une droite, sur un plan.
- Représentation paramétrique d'une droite.
- Équation cartésienne d'un plan.

1 Rappels de première sur le produit scalaire dans le plan

1.1 Expressions et propriétés du produit scalaire

Définition:

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$. On a alors $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$



! Remarque

Si A, B et C trois points du plan. On a $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})$.

Exercice:

Soit ABC un triangle équilatéral et I le milieu de $[AB]$. Déterminer les produits scalaires suivants : $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$, $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI} \rangle$ et $\langle \overrightarrow{IA}, \overrightarrow{BI} \rangle$.

Définition:

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux si et seulement si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

On rappelle que par définition générale d'un produit scalaire on a :

Définition:

On appelle produit scalaire toute application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bilinéaire, symétrique et définie positive. C'est-à-dire :

- $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle \lambda \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2, \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$
- $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2, \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$
- $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2, \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$

1.2 Projection orthogonale

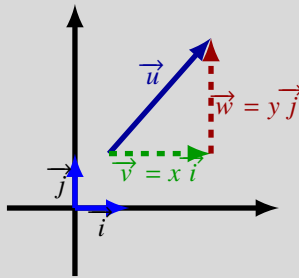
Définition:

Soit d une droite et A un point du plan. On appelle projeté orthogonal H de A sur d l'intersection de d avec la perpendiculaire à d passant par A .

Définition:

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le vecteur $\vec{u}$ se décompose selon les deux axes du repère en deux vecteurs $\vec{v} = x\vec{i}$ et $\vec{w} = y\vec{j}$ de telle sorte que :

- $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$
- $\vec{v}$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur l'axe des abscisses.
- $\vec{w}$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur l'axe des ordonnées.



! Remarque

Cette notion de projection est très régulièrement utilisée en physique lorsque l'on travaille avec des forces notamment.

1.3 Autres expressions du produit scalaire

Propriété: Formules de polarisation

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$,

- $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
- $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
- $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

Démonstration:

La démonstration est laissée au lecteur, il s'agit d'utiliser la bilinéarité du produit scalaire.

Exercice:

Soit $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{\pi}{3}$. Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

Définition:

Soient $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On a alors $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = xx' + yy'$

Exercice:

Déterminer le produit scalaire de $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Théorème:

Soit ABC un triangle quelconque. On note : $\begin{cases} a = BC & b = CA & c = AB \\ \hat{A} = \widehat{BAC} & \hat{B} = \widehat{ABC} & \hat{C} = \widehat{BCA} \end{cases}$.

Alors : $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A}) \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos(\hat{B}) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C}) \end{cases}$.

Démonstration:

En effet ;

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$$

$$\Rightarrow \|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{BA}\|^2 + 2 \langle \vec{BA}, \vec{AC} \rangle + \|\vec{AC}\|^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + CA^2 - 2 \langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle$$

$$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + CA^2 - 2 \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$$

Exercice:

Soit ABC un triangle tel que $AB = 8$, $AC = 6$ et $\hat{A} = 120^\circ$. Calculer toutes les longueurs et tous les angles de ce triangle.

1.4 Equation d'une droite et vecteur normal**Définition:**

Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, on appelle vecteur normal (généralement noté $\vec{n}$) à d tout vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$.

! Remarque

Il n'y a pas unicité du vecteur normal !

Propriété:

Soit $A(x_A; y_A)$ un point d'une droite $\mathcal{D}$ et $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur normal.

$M(x; y) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux $\iff \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = 0 \iff \mathcal{D} : ax + by + c = 0$.

Démonstration:

- Supposons que $M \in \mathcal{D}$. On a alors que $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$. Donc $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux par définition.
- Supposons que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux. Par définition on a donc bien $\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = 0$.
- Supposons que $\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = 0$. On a alors que $\langle \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rangle = 0$. D'où le résultat.
- Supposons que $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$. On a bien que $M(x; y) \in \mathcal{D}$ par définition.

Exercice:

Soit ABC un triangle tel que $A(3; -2)$, $B(0; -1)$ et $C(1; 3)$.

1. Déterminer une équation de la médiatrice de $[AB]$.
2. Déterminer une équation de la hauteur issue de C dans le triangle ABC .

2 Orthogonalité et produit scalaire dans l'espace

2.1 Orthogonalité dans l'espace

Définition:

- Deux droites sont dites orthogonales lorsque leurs parallèles respectives passant par un même point sont orthogonales.
- Une droite est orthogonale à un plan lorsque cette droite est orthogonale à toutes les droites du plan.

Propriété:

Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

Démonstration:

- Supposons que les droites d et d' sont orthogonales. Soient Δ et Δ' leurs parallèles respectives passant par le point A qui sont orthogonales. Les vecteurs directeurs de Δ et Δ' sont donc orthogonaux et deux droites parallèles ont les mêmes vecteurs directeurs. D'où le résultat.
- Considérons deux vecteurs orthogonaux, il existe alors deux droites Δ et Δ' portées par ces vecteurs passant par un même point qui sont orthogonales. Δ et Δ' sont donc respectivement parallèles à d et d' . D'où le résultat.

Propriété:

- Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un vecteur de la droite est orthogonal à une base du plan.
- Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan.

Démonstration: Hors programme

- Soit une droite $\mathcal{D}$ orthogonale à un plan $\mathcal{P}$. Soit $\mathcal{D}'$ une droite quelconque du plan $\mathcal{P}$. D'après la propriété précédente, en définissant $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\vec{u}'$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$, on a que ces deux vecteurs sont orthogonaux. Or $\vec{u}'$ étant un vecteur du plan $\mathcal{P}$, on peut le décomposer dans une base quelconque de $\mathcal{P}$. La bilinéarité du produit scalaire conclut donc la preuve.
- Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $(\vec{v}, \vec{w})$ une base de $\mathcal{P}$. Soit donc un vecteur quelconque $\vec{z}$ s'écrivant dans la base $(\vec{v}, \vec{w})$. Par bilinéarité du produit scalaire on a que $\vec{u}$ et $\vec{z}$ sont orthogonaux. Si on définit la droite $\mathcal{D}'$ portée par $\vec{z}$. On a donc le résultat.

Le deuxième point se montre de la même manière en considérant que pour deux vecteurs directeurs de deux droites sécantes d'un plan forment une base de ce plan.

Définition:

On considère une droite orthogonale à un plan.

Tout vecteur directeur de cette droite est appelé vecteur normal du plan.

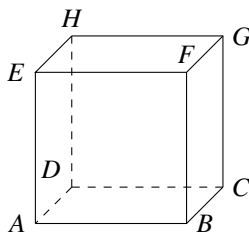
2.2 Produit scalaire dans l'espace

! Remarque

Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan restent vraies dans l'espace.

Exercice:

On considère un cube $ABCDEFGH$. Vérifier que les droites (AF) et (HB) sont orthogonales.



3 Géométrie analytique dans l'espace

3.1 Distance dans l'espace

Définition:

On dit que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ forme une base orthonormée de l'espace lorsque les vecteurs sont de norme 1 et orthogonaux deux à deux.

Propriété:

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace et $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

On a alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = xx' + yy' + zz'$

Démonstration:

La démonstration est laissée au lecteur.

Exercice:

Soient $A(3; -2; 3)$, $B(0; -1; -1)$ et $C(1; 3; 5)$. Calculer la longueur AB puis $\langle \vec{AC}, \vec{BC} \rangle$.

Définition :

Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ et S une sphère de centre $\Omega(x_\Omega; y_\Omega; z_\Omega)$ et de rayon $R \in \mathbb{R}$.

On a $M(x; y; z) \in S \iff (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$

3.2 Equation paramétrique d'une droite

Propriété:

Soit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point appartenant à la droite d de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$M(x; y; z) \in d \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$$

Démonstration:

$M \in d \iff \vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\iff \exists t \in \mathbb{R}, \vec{AM} = t\vec{u}$.

D'où le résultat.

Définition:

Le système précédent est une représentation paramétrique de la droite d .

! Remarque

Il existe une infinité de représentation paramétrique d'une droite.

Exercice:

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé et $A(1; -2; 3)$ et $B(0; 0; 1)$.

1. Déterminer une équation paramétrique de la droite (AB) .
2. Les points $C(-3; 6; -5)$ et $D(2; -5; 5)$ appartiennent-ils à cette droite ?

3.3 Equation cartésienne d'un plan

Propriété:

Soit $\vec{n}$ un vecteur et A un point de l'espace.

- L'ensemble des points M tels que $\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = 0$ est le plan de vecteur normal $\vec{n}$.
- Un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

Démonstration:

La démonstration est laissée au lecteur, elle repose sur le même principe que l'équation cartésienne d'une droite dans le plan.

! Remarque

En pratique, on détermine la valeur de d en utilisant l'appartenance d'un point au plan $\mathcal{P}$.

Propriété:

Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux lorsque $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux.

! Remarque

Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont parallèles lorsque $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.

Exercice:

Soit $A(1; -5; 7)$ et $\mathcal{P} : -2x + y + z - 4 = 0$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$ tel que le projeté orthogonal de l'origine O sur $\mathcal{P}'$ soit A .
2. Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires.

4 Projection orthogonale

4.1 Projection orthogonale d'un point sur un plan ou sur une droite

Définition:

Soit $\mathcal{P}$ un plan et M un point de l'espace.

Le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ est le point M' intersection de $\mathcal{P}$ et de la droite Δ passant par M perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

Définition:

Soit $\mathcal{D}$ une droite et M un point de l'espace.

Le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ est le point M' intersection de $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

! Remarque

Un point est uniquement déterminé par un vecteur normal et un point de l'espace.

Exercice:

Soit $\mathcal{P} : 3x + y - z - 2 = 0$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $A(5; 1; 3)$ sur $\mathcal{P}$.

4.2 Distance d'un point à un plan ou une droite

Définition:

Soit $\mathcal{P}$ un plan et A un point de l'espace.

La distance de A à $\mathcal{P}$, notée $d(A, \mathcal{P})$, est la plus petite longueur AM où $M \in \mathcal{P}$.

Définition:

Soit $\mathcal{D}$ une droite et A un point de l'espace.

La distance de A à $\mathcal{D}$, notée $d(A, \mathcal{D})$, est la plus petite longueur AM où $M \in \mathcal{D}$.

Propriété:

- Si on note H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$, on a $d(A, \mathcal{P}) = AH$.
- Si on note H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$, on a $d(A, \mathcal{D}) = AH$.

Démonstration:

La démonstration est laissée au lecteur.

Exercice:

Soient $A(-1; 2; 0)$, $B(1; 2; 4)$ et $C(-1; 1; 1)$.

- a. Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
 - b. Calculer $\angle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
 - c. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.
2. Soit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
 - a. Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
 - b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
3. Soient $\mathcal{P}_1 : 3x + y - 2z + 3 = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan passant par O et parallèle au plan $x - 2z + 6 = 0$.
 - a. Démontrer que le plan $\mathcal{P}_2$ a pour équation $x = 2z$.
 - b. Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
 - c. Soit $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est donnée par :
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ z = t \end{cases}$$
Démontrer que $\mathcal{D}$ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
4. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.

5 Exercice bilan

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

1. On considère les points $A(-1; 0; 5)$ et $B(3; 2; -1)$.

Affirmation 1: Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

Affirmation 2: Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (OAB) .

2. On considère :

- La droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k \\ z = -6 + 2k \end{cases}$
- La droite d' de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 4s \\ y = 2 + 4s \\ z = 1 - 6s \end{cases}$

Affirmation 3: Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.