

Chapitre 9 : Primitives et équations différentielles

Table des matières

Chapitre 9 : Primitives et équations différentielles	1
CARPENTIER Axel	
Contenu	2
1 Equations différentielles $y' = f$ et primitive	3
1.1 Primitive d'une fonction continue sur un intervalle	3
1.2 Primitives et fonctions de références	4
1.3 Primitives et opérations sur les fonctions	4
1.4 Primitives et composition de fonctions	5
2 Equations différentielles $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$	6
2.1 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$	6
2.2 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$	7
2.3 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + f$ avec $a \neq 0$	7
3 Exercice bilan	8

Contenu

- Équation différentielle $y' = f'$ Notion de primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
- Primitives des fonctions de référence : $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, sinus, cosinus, exponentielle,
- Équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel ; allure des courbes. Équation différentielle $y' = ay + b$.

1 Equations différentielles $y' = f$ et primitive

1.1 Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

Définition:

Soit F une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f lorsque F est dérivable sur I et que $F' = f$. On dit alors que F est une solution de l'équation différentielle $y' = f$ dont l'inconnue est y .

! Remarque

- Il n'y a pas unicité d'une primitive.
- On ne peut pas toujours expliciter une primitive d'une fonction.

Exemple:

$x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^2 + 1$ sont deux solutions distinctes de l'équation différentielle $y' = 2x$.

Théorème:

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Démonstration: (Hors programme)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Soit F une fonction définie sur I s'annulant en $\alpha \in I$. On pose $\forall x \in I, F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$. Montrons que F est une primitive de f . C'est-à-dire que l'on cherche à montrer que $F' = f$.

On a, pour tout $x \in I$ et $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt \\ &\leq \epsilon \end{aligned} \tag{1}$$

C'est-à-dire que pour tout $x \in I, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) = f(x)$. D'où le résultat.

Propriété:

Soit F une primitive d'une fonction f définies sur I . Les primitives de f sont données par les fonctions $G = F + k, k \in \mathbb{R}$.

Démonstration:

On a d'une part que G est bien dérivable sur I et $G' = F' + 0 = f$ donc G est bien une primitive de f .

Par ailleurs, si on définit $H = G - F$, H est dérivable et on a pour tout $x \in I, H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $H(x) = k$. D'où le résultat.

Propriété:

Soit f une fonction admettant des primitives sur I . Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration:

Supposons qu'il existe deux primitives F et G de f sur I respectant de telles conditions.

D'après la propriété précédente on a qu'il existe $k \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$. En évaluant l'expression précédente en x_0 on a :

$$G(x_0) = F(x_0) + k \iff y_0 = y_0 + k \iff k = 0$$

On a donc que $G = F$, d'où l'unicité.

Exercice:

Déterminer la solution F de l'équation différentielle $y'(x) = e^{2x}$ et $y(0) = 1$.

1.2 Primitives et fonctions de références

A l'aide du tableau des dérivées des fonctions de références, on en déduit les primitives suivantes.

	Fonction f	Primitive F
Constante	$f(x) = a, a \in \mathbb{R} \text{ sur } I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax \text{ sur } I = \mathbb{R}$
Puissance	$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^* \text{ sur } I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ sur } I = \mathbb{R}$
Inverse	$f(x) = \frac{1}{x} \text{ sur } I = \mathbb{R}^*$	$F(x) = \ln(x) \text{ sur } I = \mathbb{R}_+^*$
Puissance inverse	$f(x) = \frac{1}{x^n}, n > 1 \text{ sur } I = \mathbb{R}^*$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \text{ sur } I = \mathbb{R}_+^*$
Cosinus	$f(x) = \cos(x) \text{ sur } I = \mathbb{R}$	$F(x) = \sin(x) \text{ sur } I = \mathbb{R}$
Sinus	$f(x) = \sin(x) \text{ sur } I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\cos(x) \text{ sur } I = \mathbb{R}$
Exponentielle	$f(x) = e^x \text{ sur } \mathbb{R}$	$F(x) = e^x \text{ sur } I = \mathbb{R}$

1.3 Primitives et opérations sur les fonctions**Propriété:**

- Soit F et G des primitives respectives de f et g sur I . $F + G$ est alors une primitive de $f + g$.
- Soit F une primitive de f sur I et $\alpha \in \mathbb{R}$. αF est alors une primitive de αf .

Démonstration:

- On a $(F + G)' = F' + G' = f + g$, d'où le résultat.
- On a $(\alpha F)' = \alpha F' = \alpha f$, d'où le résultat.

! Remarque

Contrairement à la dérivation, il n'existe pas de formule permettant de trouver directement une primitive d'un produit ou d'un quotient de fonctions.

Exemple:

Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $f : x \mapsto x^2 - \frac{3}{x}$ est donnée par $F : x \mapsto \frac{x^3}{3} - 3 \ln(x)$

Exercice:

Déterminer la primitive F de $f(x) = x^3 + \cos(x)$ avec $F(\pi) = 0$.

1.4 Primitives et composition de fonctions

Soit $u : I \rightarrow J$ une fonction dérivable de dérivée u' et $v : J \rightarrow K$

Fonction f	Primitive F
$f = u'u$	$F = \frac{u^2}{2}$
$f = u'u^n$	$F = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
$f = u'e^u$	$F = e^u$
$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln(u)$ si $J \subset \mathbb{R}_+^*$
$f = \frac{u'}{u^n}, n \geq 2$	$F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
$f = u' \times (v' \circ u)$	$F = v \circ u$

Exercice:

Déterminer la primitive F de $f : x \mapsto xe^{1-x^2}$ telle que $F(1) = 0$.

2 Equations différentielles $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$

Dans toute cette partie, a et b désignent des nombres réels et f une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$.

2.1 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$

Définition:

L'équation $(E_0) : y' = ay$ est appelée équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants.

Exemple:

$y' = 5y$ et $2y' + 9y = 0$ sont de telles équations.

Théorème:

- Les solutions de $(E_0) : y' = ay$ sont données par les fonctions $y : x \mapsto Ce^{ax}$ où $C \in \mathbb{R}$.
- Soit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution y de (E_0) sachant que $y(x_0) = y_0$.

Démonstration:

- Montrons d'abord le premier point.
 - Soit $C \in \mathbb{R}$, les fonctions de la formes $y : x \mapsto Ce^{ax}$ sont bien solutions de (E_0) .
En effet on a pour tout $x \in I$, $y'(x) = a \times Ce^{ax} = ay(x)$.
 - Réciproquement, pour y une solution de (E_0) , on pose $g : x \mapsto y(x)e^{-ax}$.
On a pour tout $x \in I$, $g'(x) = y'(x)e^{-ax} - ay(x)e^{-ax} = ay(x)e^{-ax} - ay(x)e^{-ax} = 0$.
On a donc qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = C$. D'où $y(x) = Ce^{ax}$.
- Montrons enfin le deuxième point.
D'après le point précédent on sait qu'une solution de (E_0) est donnée par la fonction $y : x \mapsto Ce^{ax}$.
Or on sait que $y(x_0) = y_0$.
On a donc $Ce^{ax_0} = y_0 \iff C = y_0e^{-ax_0}$.
On en déduit donc que pour tout $x \in I$, $y(x) = y_0e^{a(x-x_0)}$.

Propriété:

Soit y_1 et y_2 deux solutions de (E_0) et $k \in \mathbb{R}$. $y_1 + y_2$ et ky_1 sont alors également solutions de (E_0) .

Démonstration:

La démonstration est laissée au lecteur

Exercice:

Résoudre l'équation différentielle $2y' + 9y = 0$ avec $y(2) = 1$.

2.2 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$

Définition :

L'équation $(E) : y' = ay + b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

Propriété:

Les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$.

Démonstration:

- Soit ϕ une solution particulière de (E) . On cherche ϕ sous la forme d'une constante $k \in \mathbb{R}$.
On a donc $0 = ak + b \iff k = -\frac{b}{a}$.
- Soit y une solution de (E) , on a alors que $y - \phi$ est solution de (E_0) .
- On a donc d'après une propriété précédente que pour tout $x \in I$, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que,
 $(y - \phi)(x) = Ce^{ax} \iff y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$. D'où le résultat.

Exercice:

Résoudre l'équation différentielle $2y' + 3y = 2$ avec $y(2) = -\frac{1}{3}$.

2.3 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + f$ avec $a \neq 0$

Définition :

L'équation $(E) : y' = ay + f$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

Propriété:

Soit ϕ une solution particulière de (E) . y est solution de (E) si et seulement si $y - \phi$ est solution de (E_0) .

Démonstration:

- Supposons que y soit une solution de (E) et montrons que $y - \phi$ est solution de (E_0) .
On a $(y - \phi)' = y' - \phi' = ay + f - a\phi - f = a(y - \phi)$. D'où le résultat.
- Supposons que $y - \phi$ est solution de (E_0) et montrons que y est solution de (E) .
On a $(y - \phi)' = a(y - \phi) \iff y' = ay + (\phi' - a\phi) \iff y' = ay + f$ car ϕ est solution de (E) . D'où le résultat.

! Remarque

- Le propriété est un cas particulier du principe de superposition.
 - Une solution de (E) est donc la somme d'une solution particulière et d'une solution de (E_0) .
-

Exercice:

Résoudre l'équation différentielle $2y' + 3y = 6x + 1$ avec $y(2) = -\frac{1}{3}$.

Propriété:

- Les fonctions de références sont continues sur leur intervalle de définition.
- La somme et le produit de fonctions continues sur un intervalle I sont continues sur cet intervalle.
- Si f et g sont continues sur I et que g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I .
- Si $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow K$ sont continues alors $g \circ f$ est continue sur I .

Démonstration: (Hors programme)

- Laissée au lecteur.
- Soient f et g continues sur I et $x \neq a \in I$, on a :
 $|(f+g)(x) - (f+g)(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)|$ par inégalité triangulaire.
et $|(fg)(x) - (fg)(a)| \leq |f(x)g(x) - f(x)g(a)| + |f(x)g(a) - f(a)g(a)| = |f(x)||g(x) - g(a)| + |g(a)||f(x) - f(a)|$
Or f et g sont continues en a d'où :
 $\lim_{x \rightarrow a} ((f+g)(x) - (f+g)(a)) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow a} ((fg)(x) - (fg)(a)) = 0$.
- Les deux derniers points reposent sur le même principe que le point précédent en ajoutant puis retirant une quantité puis en concluant par l'inégalité triangulaire.

Exercice:

Soit $f : x \mapsto x^2 + \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3 Exercice bilan

Soit f une solution de l'équation différentielle:

$$(E_1) : y' = 0,02y(15 - y)$$

1. Soit $g(t) = \frac{1}{f(t)}$, montrer que g est solution de l'équation différentielle :

$$(E_2) : y' = -0,3y + 0,02$$

2. Donner les solution de l'équation différentielle (E_2).

3. Sachant que $f(0) = 1$, montrer que :

$$f(t) = \frac{15}{14e^{-0,3t} + 1}$$

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

5. Résoudre l'inéquation $f(t) > 14$ sur $[0; +\infty[$.