

Chapitre 10 : Calcul intégral

Table des matières

Chapitre 10 : Calcul intégral	1
CARPENTIER Axel	
Contenu	2
1 Intégrale d'une fonction	3
1.1 Définition	3
1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire	3
2 Propriétés de l'intégrale	5
2.1 Relation de Chasles	5
2.2 Linéarité	5
2.3 Inégalités	6
2.4 Valeur moyenne	6
3 Intégration par partie	7
4 Exercice bilan	7

Contenu

- Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive définie sur un segment $[a, b]$, comme aire sous la courbe représentative de f . Notation $\int_a^b f(x)dx$
- Théorème : si f est une fonction continue positive sur $[a, b]$, alors la fonction F_a définie sur $[a, b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .
- Sous les hypothèses du théorème, relation $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f . Notation $[F(x)]_a^b$.
- Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
- Définition par les primitives de $\int_a^b f(t)dt$ lorsque f est une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle contenant a et b .
- Linéarité, positivité et intégration des inégalités. Relation de Chasles.
- Valeur moyenne d'une fonction.
- Intégration par parties.

1 Intégrale d'une fonction

1.1 Définition

Définition:

On appelle intégrale de f sur $[a ; b]$ le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I . Il est noté

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

! Remarque

La variable x est dite muette, elle n'intervient pas dans le résultat. On peut donc utiliser n'importe quelle lettre.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$$

Exercice:

Calculer l'intégrale $\int_2^3 x dx$.

1.2 Interprétation graphique : calcul d'aire

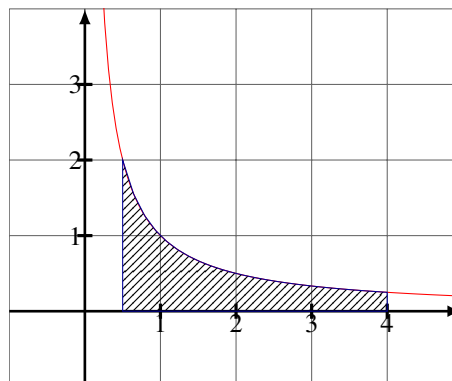
1.2.1 Aire d'une fonction positive

Définition:

Si f est une fonction positive sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx$ est égal à l'aire du domaine compris entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ exprimée en unité d'aire.

Exercice:

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 4$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.



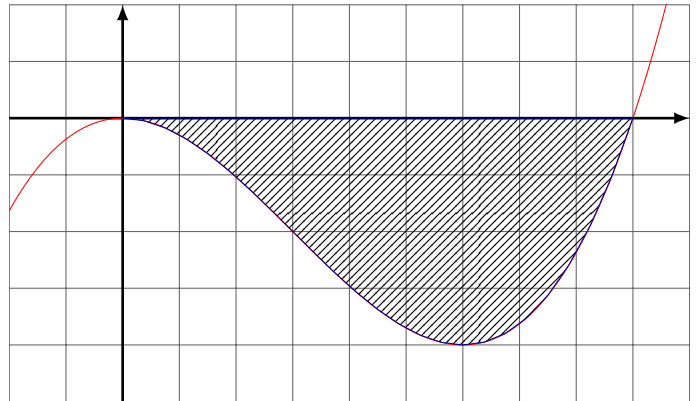
1.2.2 Aire d'une fonction négative

Définition:

Si f est une fonction négative sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx$ est égal à l'opposée de l'aire du domaine compris entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ exprimée en unité d'aire.

Exercice:

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = \frac{x^3}{27} - \frac{x^2}{3}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 9$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

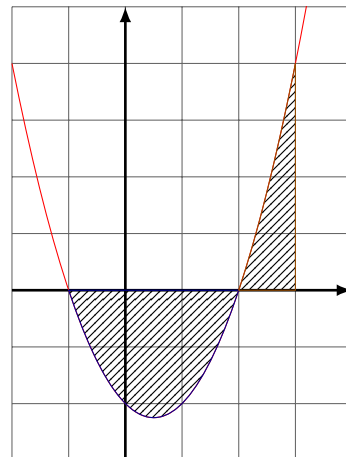


1.2.3 Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire

Pour calculer l'aire d'un domaine définie par une fonction changeant de signe, il faut découper l'intervalle en plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est de signe constant.

Exercice:

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = x^2 - x - 2$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.



2 Propriétés de l'intégrale

2.1 Relation de Chasles

Propriété: *Relation de Chasles*

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Pour tous $a, b, c \in I$ on a :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Démonstration:

$$\int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a) = F(c) - F(b) + F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Exercice:

Soit f définie pour tout $x \in [-2; 4]$ par $\begin{cases} x & \text{si } x \in [-2; 1] \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in [1; 4] \end{cases}$. Calculer $\int_{-2}^4 f(x)dx$.

2.2 Linéarité

Proposition:

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{et} \quad \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

Démonstration:

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = (F + G)(b) - (F + G)(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Exercice:

Soit f une fonction telle que $\int_1^3 f(x)dx = 2$. Calculer $\int_1^3 \frac{3}{2}f(x) + xdx$.

2.3 Inégalités

Propriété:

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ alors on a $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Démonstration:

Soit F une primitive de f sur $[a; b]$. On a que $F' = f \geq 0$. F est donc croissante sur $[a; b]$ et donc on a en particulier $F(a) \leq F(b) \iff F(b) - F(a) \geq 0$. D'où le résultat.

Corollaire:

Soit f, g deux fonctions continues sur $[a; b]$. Si pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \leq g(x)$. Alors on a $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Démonstration:

On pose la fonction $h = g - f$ et on conclut d'après la propriété précédente.

Exercice:

Démontrer que $\frac{8}{9} \leq \int_0^8 \frac{dx}{1+x} \leq 8$.

2.4 Valeur moyenne

Définition:

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ non trivial. On appelle valeur moyenne de f la quantité :

$$\mu_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Exercice:

Calculer la valeur moyenne de $f : x \mapsto (2-x)(x-1)$ sur $[-1; 0]$.

3 Intégration par partie

Propriété:

Soit u, v deux fonctions dérivables de dérivées continues sur $[a; b]$.

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Démonstration:

$$\forall x \in [a; b], (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \implies \int_a^b (uv)'(x)dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx \quad \text{d'où le résultat}$$

Exemple:

On désire calculer l'intégrale $I = \int_0^1 xe^x dx$.

- On pose $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = x \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$.
- Donc : $\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = (1e^1 - 0e^0) - [e^x]_0^1 = e - e + 1 = 1$.

4 Exercice bilan

Soit $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - x}$ la fonction définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.

On admet que f est positive sur $[0; +\infty[$. On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.

Soit (I_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^n f(x)dx$.

1. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
2. On admet que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $e^x - x \geq \frac{e^x}{2}$.
 - a. Montrer que, pour tout entier n , $I_n \leq \int_0^n 2xe^{-x}dx$.
 - b. Soit $H : x \mapsto (-x - 1)e^{-x}$ définie sur $[0; +\infty[$. Déterminer la fonction H' .
 - c. En déduire que, pour tout entier n , $I_n \leq 2$.
3. Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.