Chapitre 11 : Loi des grands nombres

Table des matières

Contenu

- Somme de deux variables aléatoires. Linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$.
- Dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes, exemples de variables indépendantes X,Y et relation d'additivité $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$. Relation $\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$.
- Application à l'espérance, la variance et l'écart type de la loi binomiale.
- Échantillon de taille n d'une loi de probabilité : liste $(X_1, \dots, X_n)$ de variables indépendantes identiques suivant cette loi. Espérance, variance, écart type de la somme $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et de la moyenne $M_n = \dfrac{S_n}{n}$.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Inégalité de concentration.
- Loi des grands nombres.

1 Variables aléatoires

1.1 Transformation affine de variables aléatoires

Définition:
On appelle variable aléatoire X toute fonction de l'univers Ω à valeurs dans $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des résultats possibles:

$$X : \begin{cases} \Omega \rightarrow X(\Omega) \\ \omega \mapsto X(\omega) \end{cases}$$

Exemple:
On lance une piece de monnaie, si on obtient Pile, on gagne 5 euros, sinon, on perd 2 euros.
On a donc $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$, $X(\text{Pile}) = 5$ et $X(\text{Face}) = -2$ d'où $E = \{-2 : 5\}$.

Définition:
Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et $a \in \mathbb{R}$. On peut définir une variable aléatoire Y sur Ω telle que pour tout $\omega \in \Omega, Y(\omega) = aX(\omega)$. On notera $Y = aX$.

Exemple:
On lance un dé à six faces et on joue au jeu suivant : le nombre de points gagnés et le résultat du dé multiplié par 5. En notant respectivement X et Y le résultat du dé et le nombre de points gagnés on a $Y = 5X$.

Définition:
Soit X, Y deux variables aléatoires définies sur Ω. On peut définir une variable aléatoire Z sur Ω telle que pour tout $\omega \in \Omega, Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$. On notera $Z = X + Y$.

Exemple:
On lance 5 dés à 6 faces et on note X la somme obtenue au total. On peut écrire $X = X_1 + ... + X_5$ où X_i détermine la valeur du i-ième dé.

Exercice:
Une boîte contient des jetons rouges et des jetons jaunes indiscernables au toucher. Les jetons rouges correspondent à un gain de 3 euros et les jetons jaunes à un gain de 2 euros. Tire avec remise deux jetons de la boîte.
On note R l'événement "On a obtenu une boule rouge" et J l'événement "On a obtenu une boule jaune". On travaille avec $\Omega = \{R, J\}^2$.
On note X_1 et X_2 les variables aléatoires désignant les gains obtenus respectivement au 1er et au 2eme tirage.

1. Calculer les valeurs $X_2((R, R))$, $X_1((R, J))$, $X_2((R, J))$, $X_1((J, R))$ et $X_2((J, J))$.
2. Soit X la variable aléatoire correspondant au gain total obtenu à l'issue des deux étapes. Exprimer X en fonction de X_1 et X_2.

1.2 Espérance d'une somme de variables aléatoire

Propriété: *Linéarité de l'espérance*
Soit X, Y deux variables aléatoires définies sur l'univers Ω, on a :

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

Démonstration:
Notons $Z = X + Y$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \sum_{z\in Z(\Omega)} z\mathbb{P}(Z=z) \\
&= \sum_{z\in Z(\Omega)} z\mathbb{P}(X+Y=z) \\
&= \sum_{z\in Z(\Omega)} z\mathbb{P}((X+Y=z) \cap \bigcup_{y\in Y(\Omega)} (Y=y)) \\
&= \sum_{z\in Z(\Omega)} z \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}((X=z-y) \cap (Y=y)) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} (x+y)\mathbb{P}((X=x) \cap (Y=y)) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} x\mathbb{P}((X=x) \cap (Y=y)) + \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbb{P}((X=x) \cap (Y=y)) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}((X=x) \cap \bigcup_{y\in Y(\Omega)} (Y=y)) + \sum_{y\in Y(\Omega)} Y\mathbb{P}((Y=y) \cap \bigcup_{x\in X(\Omega)} (X=x)) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x) + \sum_{y\in Y(\Omega)} Y\mathbb{P}(Y=y)
\end{aligned} \tag{1}$$

Corollaire:
Soit X, Y deux variables aléatoires définies sur Ω et $a \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(aX+Y) = a\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

Démonstration:
Le premier point repose sur le même principe que la preuve de la propriété précédente en posant une variable aléatoire $Z = aX$.
Le deuxième point est une conséquence du premier point et de la propriété précédente.

1.3 Variance d'une somme de variables aléatoires

Propriété:
Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et $a \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$$

Démonstration:
Par définition on a :

$$\mathbb{V}(aX) = \mathbb{E}((aX - \mathbb{E}(aX))^2) = \mathbb{E}((aX - a\mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(a^2(X - \mathbb{E}(X))^2) = a^2\mathbb{V}(X)$$

Définition:
Soit $(X_1, \ldots X_n)$ une famille de n variables aléatoires à valeur dans $X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$. Ces variables aléatoires sont dites indépendantes si on a pour tout $(x_1, \ldots x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$:

$$\mathbb{P}((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \ldots \cap (X_n = x_n)) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

! Remarque

En particulier, on dira que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si pour tous $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$$

Propriété:
Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur Ω, on a :

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

Démonstration: *(Hors programme)*
Démonstration laissée au lecteur, il s'agit d'utiliser les deux propriétés suivantes :

- $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$, se démontre en utilisant la définition de la variance et la linéarité de l'espérance.
- Pour X, Y indépendants : $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$, se démontre sur le même modèle que la linéarité de l'espérance.

2 Applications

2.1 Loi binomiale

Définition:
Deux variables aléatoires sont dites identiquement distribuées lorsqu'elles suivent la même loi de probabilité.

Propriété:
Toute variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut s'écrire comme somme de n variables aléatoires identiquement distribuées suivants une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On a par ailleurs :

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p)$$

Démonstration:
Cette propriété a déjà été démontrée dans un chapitre précédent.

2.2 Echantillons de n v.a.i.i.d

Soient $n \geq 1$ et $X_1, \ldots, X_n$, n v.a.i.i.d (variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées).
On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et $M_n = \dfrac{S_n}{n}$

Propriété:
Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\mathbb{E}(S_n) = n\mathbb{E}(X_k) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(S_n) = n\mathbb{V}(X_k)$$

et :

$$\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(X_k) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(M_n) = \frac{\mathbb{V}(X_k)}{n}$$

Démonstration:
Par récurrence, immédiat d'après les propriétés de l'espérance et de la variance.

3 Inégalités de concentration

3.1 Inégalité de Markov

Définition:
Une variable aléatoire X est dit positive lorsque $X(\Omega) \in \mathbb{R}_+$.

Propriété:
Soit X un variable aléatoire positive et $a > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Démonstration:
On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega), x \geq a} x\mathbb{P}(X = x) + \sum_{x \in X(\Omega), x < a} x\mathbb{P}(X = x) \\
&\geq \sum_{x \in X(\Omega), x \geq a} a\mathbb{P}(X = x) \\
&\geq a\mathbb{P}(X \geq a)
\end{aligned} \tag{2}$$

Exercice:
Une usine produit en moyenne 35 pièces par semaine.
On note X le nombre de de pièces que l'usine fabrique par semaine. Que peut-on dire de la probabilité que l'usine fabrique plus de 70 pièces par semaine ?

3.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété:
Soit X un variable aléatoire et $\epsilon > 0$. On a :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

Démonstration:
Il s'agit de remarquer que $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) = \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \epsilon^2)$ puis d'appliquer l'inégalité de Markov.
Exercice:
Lors d'une saison de football, le nombre moyen de buts par match est de $2,5$ avec une variance de $1,1$. Majorer la probabilité que le match suivant ne se termine pas avec deux ou trois buts.

3.3 Inégalité de concentration

Propriété:
Soit M_n une variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X et $\epsilon > 0$. On a :

$$\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{n\epsilon^2}$$

Démonstration: *(Hors programme)*
On a $\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) = \mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| \geq \epsilon) \leq \dfrac{V(M_n)}{\epsilon^2} = \dfrac{\mathbb{V}(X)}{n\epsilon^2}$

4 Loi des grands nombres

Théorème: *Loi faible des grands nombres*
Soit (X_n) une suite de v.a.i.i.d admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$ et $a > 0$. On a alors que $M_n = \dfrac{X_1 + ... + X_n}{n}$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}(X)$, c'est-à-dire:

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(X)| \geq a) = 0$$

Démonstration:
Ce résultat découle immédiatemment de l'inégalité de concentration.
Exercice:
On considère un jeu de 52 cartes. On tire 13 cartes avec remise et on compte le nombre de rois obtenus. D'après la loi des grands nombres, si on repète cette expérience un grand nombre de fois et que l'on note M_n la moyenne des résultats obtenus, vers quelle valeur M_n converge-t-elle ?

5 Exercice

1. Lors d'une collecte de sang, on choisit un échantillon de 100 personnes dans la population d'une ville française. Cette population est suffisamment grande pour assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 100 personnesassocie le nombre de donneurs universels dans cet échantillon. On estime que la probabilité d'être un donneur universel est de $0,0714$.
   a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b. Déterminer à 10^{-3} près la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans cet échantillon.
   c. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.
2. Lors de la semaine nationale du don du sang, une collecte de sang est organisée dans N villes françaises choisies au hasard numérotées 1,2,3,. . . ,N où N est unentier naturel non nul. On considère la variable aléatoire X_1 qui à chaque échantillon de 100 personnesde la ville 1 associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon. On définit de la même manière les variables aléatoires X_2 pour la ville 2, ...,X_N pour la ville N.

On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes et qu'ellesadmettent la même espérance égale à 7,14 et la même variance égale à 6,63. On considère la variable aléatoire $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}$.

a. Calculer $\mathbb{E}(M_N)$.
b. Exprimer $\mathbb{V}(M_N)$ en fonction de N.
c. Déterminer la plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebuchev permet d'affirmer que :

$$\mathbb{P}(7 < M_N < 7,28) \geq 0,95$$