

Chapitre 12 : Fonctions trigonométriques

Table des matières

Chapitre 12 : Fonctions trigonométriques	1
CARPENTIER Axel	
Contenu	2
1 Cercle trigonométrique et radian	3
1.1 Le cercle trigonométrique	3
1.2 Enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique	3
1.3 Le radian	3
2 Mesure d'un angle orienté	4
2.1 Lire sur le cercle trigonométrique	4
2.2 Mesure principale d'un angle orienté	5
3 Cosinus et sinus d'un nombre réel	5
3.1 Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus	6
3.2 Fonctions cosinus et sinus	6
4 Exercice bilan	9

Contenu

- Fonctions trigonométriques sinus et cosinus : dérivées, variations, courbes représentatives.

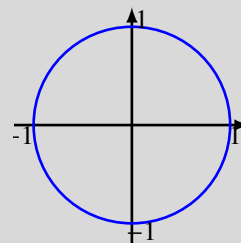
1 Cercle trigonométrique et radian

1.1 Le cercle trigonométrique

Définition:

Sur un cercle, on appelle sens trigonométrique (ou sens direct) le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé et orienté dans le sens direct, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1.

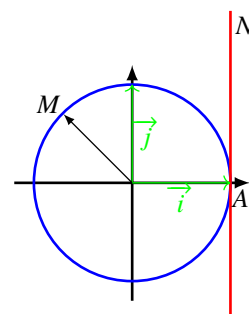


1.2 Enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que $(A, \vec{j})$ soit un repère de la droite.

Si on "enroule" la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle.

La longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est ainsi égale à la longueur AN .



1.3 Le radian

Propriété:

La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π .

Ainsi, à un tour complet sur le cercle, on peut faire correspondre le nombre réel 2π . On définit alors une nouvelle unité d'angle: le radian, défini tel qu'un tour complet mesure 360° ou 2π radians.

Ainsi, à 2π radians (un tour complet), on peut faire correspondre un angle de 360° . Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes:

Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

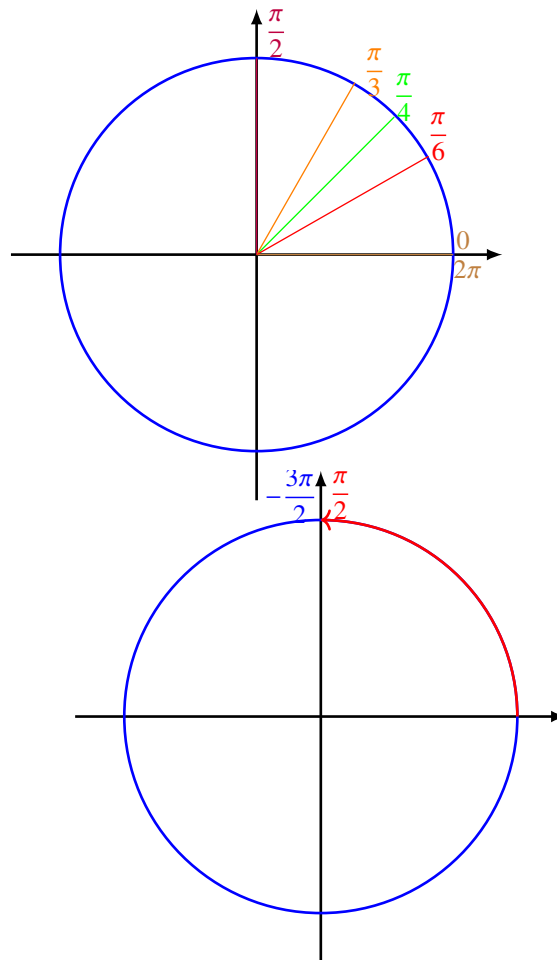
Exercice:

Donner la mesure en radians de l'angle de mesure 33° puis donner la mesure en degrés de l'angle de mesure $\frac{3\pi}{8}$ radians.

2 Mesure d'un angle orienté

2.1 Lire sur le cercle trigonométrique

On représente par exemple ci-contre des mesures remarquables sur le cercle trigonométrique



Par exemple, $\frac{\pi}{2}$ correspond à l'angle droite, soit 90° . Il est également possible de faire la lecture dans l'autre sens (sens indirect), ce qui donne $-\frac{3\pi}{2}$. Les mesure $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{2}$ sont donc associées à un même point sur le cercle.

Comme la lecture s'effectue sur un cercle, il est également possible de faire plusieurs fois le tour.

On va donc avoir que $-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ ainsi que $\frac{5\pi}{2}$ sont associées à un même point sur le cercle trigonométrique (sans pour autant que ces mesures soient égales !).

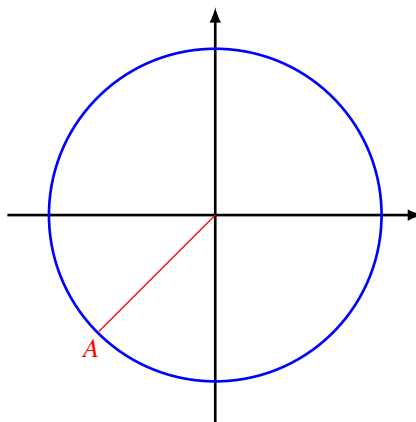
Exercice:

Lire sur le cercle trigonométrique l'angle associé au point A sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ puis sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

Placer sur le cercle trigobométrique le point

B associé à l'angle $\frac{9\pi}{4}$, le point C associé à

l'angle $\frac{8\pi}{3}$ et le point D associé à l'angle $-\frac{9\pi}{2}$



2.2 Mesure principale d'un angle orienté

Nous avons vu qu'à un seul point on pouvait associer plusieurs valeurs d'angles. Nous allons en choisir une seule valeur que l'on va appeler le représentant.

Définition:

La mesure principale d'un angle orienté est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $] -\pi; \pi]$.

Exemple:

Une mesure d'un angle est $\frac{7\pi}{4}$. D'autres mesures sont données par exemple par $\frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4} - 4\pi = -\frac{9\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4} - 6\pi = -\frac{17\pi}{4}$...
 $-\frac{\pi}{4}$ est la mesure principale de cet angle car c'est la seule comprise dans l'intervalle $] -\pi; \pi]$

Exercice:

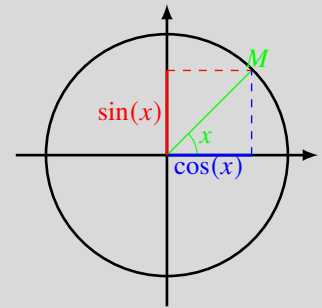
Donner la mesure principale de l'angle $\frac{27\pi}{4}$.

3 Cosinus et sinus d'un nombre réel

Définition:

Soit M le point du cercle trigonométrique associé au nombre x (qui est un angle orienté).

Le point M a pour coordonnées $(\cos(x); \sin(x))$.



Propriétés:

Soit $x \in \mathbb{R}$:

- $\cos(x) \in [-1; 1]$
- $\sin(x) \in [-1; 1]$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Démonstration:

La démonstration des deux premiers points découle de la définition même du cercle trigonométrique et celle du troisième point découle du théorème de Pythagore.

3.1 Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Exercice:

Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ et de $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

Exercice:

Résoudre les équations suivantes :

• $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [0; 2\pi]$

• $\sin(x) = \frac{1}{2}, x \in [-\pi; \pi]$

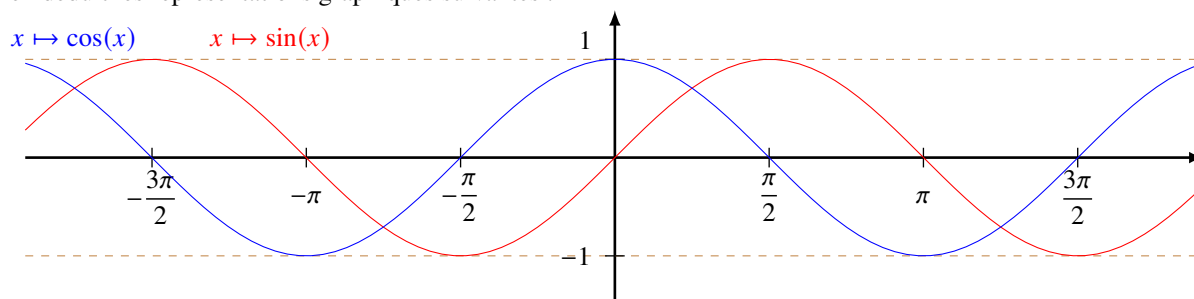
3.2 Fonctions cosinus et sinus

3.2.1 Définitions et représentations graphiques

Définition:

- La fonction cosinus est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \cos(x)$.
- La fonction sinus est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin(x)$.

On en déduit les représentations graphiques suivantes :



Définition/Propriété:

$\forall (x, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$ et $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$.

On dira alors que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π , ou encore simplement 2π -périodiques.

Cela signifie que l'on retrouve la même "parcelle de courbe" sur chaque intervalle de longueur 2π .

3.2.2 Parité**Définitions:**

- Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est une fonction paire. C'est-à-dire qu'une fonction f quelconque est paire si et seulement si $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = f(x)$.
- Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère est une fonction impaire. C'est-à-dire qu'une fonction f quelconque est impaire si et seulement si $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = -f(x)$.

Propriétés:

- La fonction cosinus est paire, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$.
- La fonction sinus est impaire, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$.

Démonstration:

Par construction même des fonctions cos et sin.

Exercice:

Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(x) - \sin(2x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est impaire.

3.2.3 Equations trigonométriques**Propriété:**

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

- | | |
|---|--|
| • $\cos(-x) = \cos(x)$ | • $\sin(-x) = -\sin(x)$ |
| • $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ | • $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ |
| • $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ | • $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ |
| • $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ | • $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ |
| • $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$ | • $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$ |

Démonstration:

La démonstration est laissée au lecteur, il s'agit de remarquer que la mesure des angles ainsi formés sont égales en représentant, par exemple, sur le cercle trigonométrique.

Exemple:

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

Exercice:

Sans calculatrice, déterminer les valeurs suivantes :

- $A = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$
- $B = \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{11\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{13\pi}{8}\right)$

Propriété:

Soit $a, x \in \mathbb{R}$. On a :

- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $\cos(x) = \cos(a)$ sont $\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = -a + 2k\pi \end{cases}$ où $k \in \mathbb{Z}$.
- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $\sin(x) = \sin(a)$ sont $\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple:

On cherche à résoudre l'équation $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

$$\text{On a } \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{10}\right).$$

$$\text{D'où } \sin(x) = \sin\left(\frac{7\pi}{10}\right) \implies x = \frac{7\pi}{10} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{10} + 2k\pi.$$

Exercice:

$$\text{Résoudre sur } \mathbb{R} \text{ l'équation } 4 \sin^2\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) + 4 \sin\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) = 3.$$

3.2.4 Dérivation

Propriété:

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

Démonstration: (Hors programme)

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \frac{\sin(h)}{h} \right) \\ &= \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \\ &= \cos(x) \cos'(0) - \sin(x) \sin'(0) \\ &= -\sin(x)\end{aligned}\tag{1}$$

La preuve fait appel à certains passages hors programme, notamment le passage de l'avant dernière ligne à la dernière ligne qui repose sur les développements limités.

4 Exercice bilan

Soit $f : x \mapsto \cos(x)(1 + \sin(x))$ définie sur $[0; \pi]$ représentée par C dans un repère.

1. Vérifier que f est 2π -périodique et que f n'est ni paire ni impaire.
2. Justifier que f est dérivable sur $[0; \pi]$ et que pour tout $x \in [0; \pi]$, $f'(x) = (1 + \sin(x))(1 - 2\sin(x))$.
3.
 - a. Résoudre sur $[0; \pi]$ l'inéquation $2\sin(x) \leq 1$.
 - b. En déduire le tableau de signe de f'
4. Etablir le tableau de variation de f .
5. Vérifier que pour tout $x \in [0; \pi]$, $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Qu'en déduit-on pour la courbe C ?
6. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à C au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
7. Tracer $\mathcal{T}$ puis C .