

1 Limites de fonctions

1.1 Compétences Attendues

- Déterminer dans des cas simples la limite d'une suite ou d'une fonction en un point, en $\pm\infty$, en utilisant les limites usuelles, les croissances comparées, les opérations sur les limites, des majorations, minoration ou encadrements, la factorisation du terme prépondérant dans une somme.
- Faire le lien entre l'existence d'une asymptote parallèle à un axe et celle de la limite correspondante.

1.2 Exercices

Exercice 1:

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en a .

1. $f : x \mapsto x^3 + x - 3$ en $a = +\infty$ puis en $a = -\infty$.
2. $f : x \mapsto x^3 - x^2$ en $a = +\infty$ puis en $a = -\infty$.
3. $f : x \mapsto \frac{1}{1 + e^{-x}}$ en $a = +\infty$ puis en $a = -\infty$.
4. $f : x \mapsto \frac{1}{x^3} + 4\sqrt{x}$ en $a = +\infty$ puis en $a = 0^+$.
5. $f : x \mapsto \frac{2x}{1-x}$ en $a = 1^+$ puis en $a = 1^-$.
6. $f : x \mapsto x^2 - 3x + 1$ en $a = +\infty$ puis en $a = -\infty$.
7. $f : x \mapsto (1 - 2x)e^x$ en $a = +\infty$ puis en $a = -\infty$.
8. $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x) - 1}$ en $a = 0^+$ puis en $a = 0^-$.
9. $f : x \mapsto \frac{2x}{1-x}$ en $a = +\infty$ puis en $a = -\infty$.
10. $f : x \mapsto \frac{(x+5)^2 - 25}{x}$ en $a = +\infty$ puis en $a = 0$.
11. $f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 25}$ en $a = +\infty$, en $a = -\infty$, en $a = 5^+$, en $a = 5^-$, en $a = (-5)^+$ puis en $a = (-5)^-$.

Exercice 2:

Soient f et g deux fonctions. Justifier par un contre exemple que les implications suivantes sont fausses.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = 0$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Exercice 3:

Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

- | | |
|--|--|
| 1. $f : x \mapsto x^3 - 2x$ | 3. $f : x \mapsto \frac{x^2 - x}{x^3 - 2}$ |
| 2. $f : x \mapsto \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ | 4. $f : x \mapsto \frac{3x^3 + 2}{2x^2 + 4}$ |

Exercice 4:

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x , $x - 2 \leq f(x) \leq x + 2$. Que peut-on en déduire pour les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$?

Exercice 5:

Déterminer les limites de chaque fonction en $+\infty$:

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1. $f : x \mapsto x^2 + 2\cos(x)$ | 3. $h : x \mapsto \frac{1}{\cos(x) + x}$ |
| 2. $g : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ | 4. $k : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$ |

Exercice 6:

Soit f une fonction telle que, pour tout $x > 1$, $\frac{2x^2 + 3}{3x^2 - x} \leq f(x) \leq \frac{2x^2 + 5x}{3x^2 - x}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 7:

Déterminer les limites de chaque fonction en $-\infty$ et en $+\infty$:

- | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|----------------------------|
| 1. $f : x \mapsto \frac{1}{e^x + 1}$ | 2. $g : x \mapsto \frac{e^x + 1}{x}$ | 3. $h : x \mapsto e^x + 2$ |
|--------------------------------------|--------------------------------------|----------------------------|

Exercice 8:

1. (a) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, $e^{3x+2} > e^x$.
(b) En déduire alors la limite de $x \mapsto e^{3x+2}$ en $+\infty$.

2. Calculer de la même façon la limite des expressions suivantes en $+\infty$:

$$(a) e^{2x-1} \quad \left| \quad (b) \frac{2}{e^{5x-3}} \quad \right| \quad (c) e^{-4x-1}$$

Exercice 9:

Déterminer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3xe^x + 4e^x + 3x}{e^{2x} + e^x + 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3xe^x + 4e^x + 3x}{e^{2x} + e^x + 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{28x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{3x}}{28x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 3x^2 + 5x - 1$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 3x^2 + 5x - 1$$

$$9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 + \cos(x))e^x}{x}$$

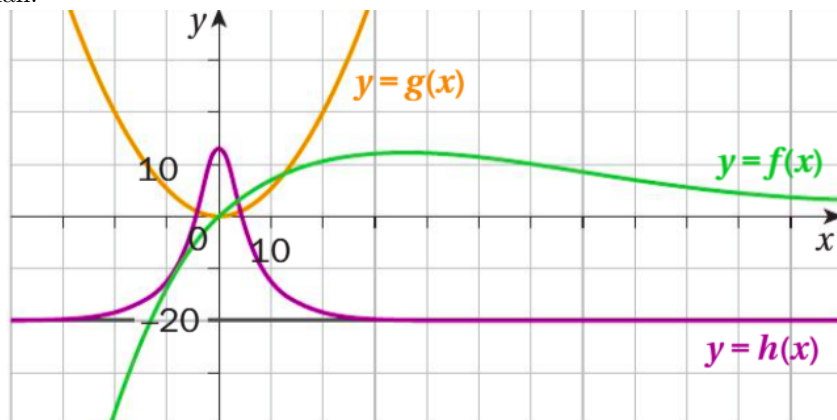
$$14. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2 + \cos(x))e^x}{x}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} - x$$

$$16. \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} - x$$

Exercice 10:

On considère les courbes représentatives des fonctions f, g et h dans un repère du plan.



Déterminer, lorsque c'est possible, les limites demandées:

$$1. (a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g)(x)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (f + g)(x)$$

$$2. (a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \times g)(x)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (f \times g)(x)$$

$$3. (a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f}{g} \right)(x)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f}{g} \right)(x)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f + h)(x)$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (f + h)(x)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \times h)(x)$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (f \times h)(x)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f}{h} \right)(x)$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f}{h} \right)(x)$$

Exercice 11:

Soit $f : x \mapsto \frac{\sqrt{9x^2 + 2x + 1}}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

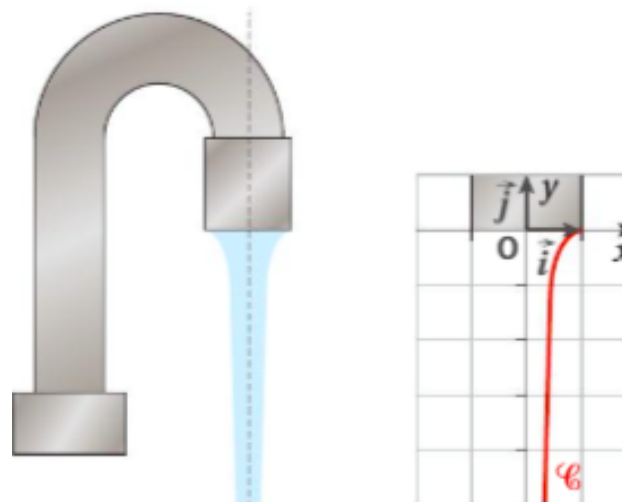
1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $9x^2 \leq 9x^2 + 2x + 1 \leq (3x + 1)^2$.

2. En déduire que pour tout $x > 0$, $3 \leq f(x) \leq \frac{3x + 1}{x}$.

3. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 12:

L'écoulement de l'eau d'un robinet a un débit constant et modéré. On s'intéresse en particulier à une partie du profil d'écoulement que l'on modélise par la courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous dans un repère orthonormé.



$\mathcal{C}$ est la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $]0;1]$ qui respecte les trois conditions suivantes :

$$(\mathcal{H}) : f(1) = 0, f'(1) = 0, 25 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

- Justifier que la fonction f ne peut pas être une fonction polynôme du second degré.
- Déterminer les nombres réels a et b pour lesquels f est la fonction définie sur l'intervalle $]0;1]$ par $f(x) = \frac{a}{x^4} + bx$ de façon à ce qu'elle respecte les trois conditions $(\mathcal{H})$.

Exercice 13:

Soit $g : x \mapsto (2x^3 - 4x^2)e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

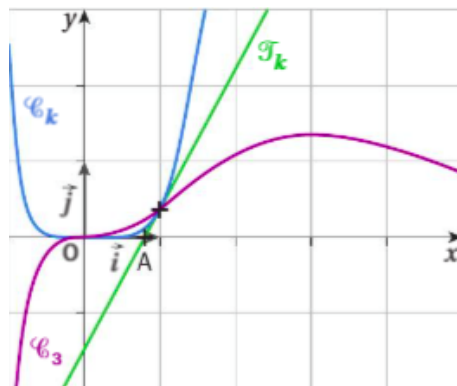
- Déterminer $g'(x)$.
- Déterminer le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer les limites de la fonction g en $+\infty$ et en $-\infty$ en justifiant soigneusement et préciser les équations des asymptotes éventuelles à sa courbe représentative.
- Déterminer les variations de g et dresser le tableau de variations complet de la fonction g .

Exercice 14:

Pour tout nombre entier non nul n , on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n e^{-x}$. On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Sur le graphique ci-contre, on a représenté une courbe $\mathcal{C}_k$ où $k \in \mathbb{N}^*$, sa tangente $\mathcal{T}_k$ au point d'abscisse 1 et la courbe $\mathcal{C}_3$.

L'objectif du problème est de déterminer la valeur de k telle que la droite $\mathcal{T}_k$ coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\frac{4}{5}; 0\right)$.



- Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - Etudier les variations de la fonction f_1 et dresser son tableau de variations.

(c) A l'aide du graphique, justifier que k est un nombre entier supérieur ou égal à 2.

- Démontrer que si $n > 1$, alors toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par le point O et un autre point dont on déterminera les coordonnées.
 - Vérifier que, pour tout nombre entier naturel $n \geq 2$ et pour tout réel x , on a :

$$f'_n(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$$
- Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$. Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.
- Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite $\mathcal{T}_k$ avec l'axe des abscisses.
 - En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur du nombre entier k .

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 15:

Soit $f : x \mapsto 0,03x^2 - 150x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

- Dresser le tableau de variation de f .
- Résoudre l'inéquation $0,03x^2 - 150x + 1 \geq 100$.
- L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?
 "Si $x > 5000$ alors $f(x) > 100$ ".

4. Voici une fonction Python

```
1 def seuil(A):
2     x=2500
3     while 0.03*x**2-150*x+1<A:
4         x+=1
5     return x
```

Que renvoie `seuil(100)`? `seuil(1000)`? `seuil(10000)`?

- La fonction `seuil` renverra-t-elle une valeur numérique pour tout valeur de A aussi grande que l'on veuille ?

Exercice 16:

On considère une famille de fonctions f_n dépendant d'un paramètre entier relatif n et définies sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f_n : x \mapsto \frac{(n-3)(x^3 - x - 2)}{x+1} - x^2$.

1. Recopier et compléter le programme Python ci-dessous, qui trace les courbes représentatives de ces fonctions $[0; 10000]$ pour $-10 \leq n \leq 10$.

```

1  import matplotlib.pyplot as plt
2
3
4  def fn(x,n):
5      return ...
6
7
8  absc=[i for i in range(10000)]
9  for n in range(...):
10     ordo=[... for x in ...]
11     plt.plot(absc,ordo,linewidth=1)
12     plt.text(10000,fn(10000,n),str(n))
13
14  axe=plt.gca()
15  axe.spines['bottom'].set_position('zero')
16  axe.spines['left'].set_position('zero')
17  axe.spines['right'].set_color('none')
18  axe.spines['top'].set_color('none')
19  plt.show()

```

2. En déduire une conjecture concernant la limite de f_n en $+\infty$ en fonction du paramètre n .
3. Confirmer ou infirmer cette conjecture par un raisonnement mathématique.

1.4 Approfondissements

Exercice 17:

Etudier les limites suivantes :

$$1. \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}} \text{ en } +\infty \quad \left| \quad 2. \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \text{ en } +\infty \right.$$

Exercice 18:

Etudier les limites à droit en 0 des fonctions suivantes :

$$1. f : x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \quad \left| \quad 2. g : x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \quad \left| \quad 3. h : x \mapsto x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \right.$$

Exercice 19:

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Etudier et déterminer, si elles existent, les limites en 0 des fonctions:

$$1. f : x \mapsto \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \quad \left| \quad 2. g : x \mapsto \frac{b}{x} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \right.$$