1 Logarithme népérien

1.1 Compétences Attendues

- Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation.
- Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme.

1.2 Exercices

Exercice 1:
Résoudre les équations suivantes :

1. $e^x = 5$
2. $\ln(x) = -5$
3. $\ln(2x-1) = -2$
4. $\ln(1+x) = 100$

Exercice 2:
Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$
2. $2\ln(x)^2 + 5\ln(x) - 3 = 0$
3. $\ln(x^2-3) \leq \ln(x) + \ln(2)$
4. $2\ln(x)^2 + 5\ln(x) - 3 > 0$

Exercice 3:
Résoudre les équations suivantes en précisant leur domaine de résolution.

1. $\ln(x) = 2$
2. $\ln(3x-4) = 0$
3. $e^{3x+2} = 4$
4. $2 + 3\ln(3x-2) = -1$
5. $\ln(e^{3x}+4) = 5$
6. $e^{x^2} = 7$
7. $(e^{2x+1}-3)(3x-7)(e^x+5) = 0$
8. $\ln(x)^2 - \ln(x) = 0$

Exercice 4:
En utilisant un changement de variable, résoudre l'équation $3e^{2x} + 9e^x - 30 = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5:
Pour tout réel x, on pose $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Cette quantité est appelée cosius hyperbolique de x.

1. Justifier que cosh est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel $x, \cosh''(x) = \cosh(x)$.
2. Pour tout réel $x \geq 1$, on pose $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.
   (a) Montrer que pour tout $x \geq 1, \cosh \circ f(x) = x$.
   (b) On admet que pour tout réel $x, \cosh(x) \geq 1$. Montrer que $f \circ \cosh(x) = x$.

Exercice 6:
Simplifier les écritures suivantes :

1. $\ln(3) + \ln(4) - \ln(6)$
2. $4\ln(3) - \ln(9) + 2\ln(27)$
3. $\dfrac{\ln(9)}{\ln(3)} - \ln(1)$
4. $\ln(3x^2) - \ln(3)$ avec $x > 0$

Exercice 7:
Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln(2)$.

1. $\ln(8)$
2. $\ln(\sqrt{2})$
3. $\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$
4. $3\ln(2) - \ln(16)$

Exercice 8:
Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln(3)$ et $\ln(7)$.

1. $\ln\left(\dfrac{81}{7}\right)$
2. $\ln(441)$
3. $\ln\left(\dfrac{49}{27}\right)$
4. $\ln(\sqrt{21})$

Exercice 9:
Résoudre l'équation suivante pour $x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(4x^2) + 6\ln(x) - 3$.

Exercice 10:
Montrer que pour tout réel $x > 0, \ln(x^2-1) - \ln(x^2+2x+1) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

Exercice 11:
Que vaut $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) + ... + \ln\left(\dfrac{49}{50}\right)$?

Exercice 12:
Montrer que pour tout réel $x, \ln(1+e^{-x}) = \ln(1+e^x) - x$.

Exercice 13:
Soient f et g les fonctions définies par les expressions:
$f : x \mapsto \ln(x+3) + \ln(x-2)$ et $g : x \mapsto \ln(x^2 + x - 6)$.
Déterminer l'ensemble de définition de f et de g. Que peut-on dire de ces deux fonctions ?

Exercice 14:
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{e^{-1}\}$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)+1}$. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 15:
Déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

1. $f : x \mapsto 3x + 5 - \ln(x)$
2. $g : x \mapsto \ln(x) + x^4$
3. $h : x \mapsto \dfrac{1}{x} + 4\ln(x)$
4. $k : x \mapsto \ln(x)(x+1)$

Exercice 16:
Déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle I indiqué.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}, I =]0;1[$
2. $g : x \mapsto (\ln(x))^2(3 - \ln(x), I =]0, +\infty[$
3. $h : x \mapsto (2 - \ln(x))(1 - \ln(x)), I =]0; +\infty[$
4. $k : x \mapsto e^{5\ln(x)+2}, I =]0; +\infty[$

Exercice 17:
On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(x) + x^2$ définie sur $]0; +\infty[$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Calculer f' et étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variation complet de f.

Exercice 18:
Déterminer l'ensemble de définition puis dériver chacune des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \ln(5x - 3)$
2. $g : x \mapsto \ln(-8x + 4)$
3. $h : x \mapsto \ln(-7x)$
4. $k : x \mapsto \ln(x^2 - 2x + 1)$

Exercice 19:
Déterminer l'ensemble de définition puis dériver chacune des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \ln(5x - 1)$
2. $g : x \mapsto \ln(9 - x^2)$
3. $h : x \mapsto \ln(1 + e^x)$

Exercice 20: Soit $f : x \mapsto \ln(3x - 1)$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Etudier les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
3. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 21:
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

1. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Exprimer S_n en fonction de n.
2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $S_n > 5,999$.

Exercice 22:
Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{1}{\ln(n+1)}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln(n) - 2n$
3. $\forall n \geq 2, u_n = \ln\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln(n+2) - \ln(3n)$

Exercice 23:
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une suite de fonctions f_n définies pour tout $x \in [1;5]$ par $f_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n}$. On notera $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n.

1. Montrer que, pour tout $n > 0$ et $x \in [1;5], f_n'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$.
2. Pour tout $n > 0$, on admet que f_n admet un maximum sur $[1;5]$. On note A_n le point de la courbe $\mathcal{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum. Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe R d'équation $y = \dfrac{1}{e}\ln(x)$.

Exercice 24:
Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tire θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas $1,6m$. On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans le plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $]0;1[$ par $f : x \mapsto bx + 2\ln(1-x)$, où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, exprimées en mètres.

1. Démontrer que pour tout $x \in]0;1[$, $f'(x) = \dfrac{-bx+b-2}{1-x}$.
2. Démontrer que le maximum de la fonction f est égal à $b - 2 + 2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)$.
3. Déterminer pour quelle valeurs de b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas $1,6m$.
4. Dans cette question on choisit $b = 5,69$. L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction au point d'abscisse 0. Déterminer une valeur approchée au dixième de dégré de l'angle θ.

Exercice 25:
En accoustique, si un son possède une intensité sonore I (en W/m^2), son niveau sonore (en dB) est donné par $N(I) = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ où $\log = \dfrac{\ln}{\ln(10)}$ et $I_0 = 10^{-12}W/m^2$ (plus petite intensité perceptible par l'oreille humaine). Après un traumatisme, Adel ne supporte plus un niveau sonore supérieur à $90dB$. Lors d'un concert, l'intensité sonore maximale était de $4W/m^2$. Adel a-t-il pu rester dans la salle ? Justifier.

Exercice 26:
Soit $f : x \mapsto \ln(x) + ax + b$ définie sur $]0;10]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On donne son tableau de variation ci-dessous:

x	0		2		10
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$-2+\ln 2$	$\searrow$	$-6+\ln 10$

Déterminer une expression de f.

Exercice 27:
On considère, pour tout $k > 0$, les fonctions $f_k : x \mapsto x + ke^{-x}$ définies sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de f_k et A_k le point de $\mathcal{C}_k$ correspondant au minimum de f_k. Démontrer l'existence de A_k puis déterminer si les points A_k sont alignés (ou non). Justifier.

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 28:
Marwa s'interroge sur la fonction p codée en Python ci-dessous.

```
import math
def p(a,b):
    c=math.log(a)+math.log(b)
    return math.exp(c)
```

1. Que valent `p(3,5)` et `p(7,3)` ?
2. Démontrer que l'on pouvait s'attendre à ce résultat

Exercice 29:
Soit $f : x \mapsto x - \ln(1+x^2)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Etablir le tableau de variation de f puis montrer que $[0;1]$ est stable par f.
2. Ecrire un programme Python qui prend en argument un nombre réel `A` et qui indique le plus petit entier n tel que $f(n) > A$. Le tester pour $A = 100$.

1.4 Approfondissements

Exercice 30:

1. Dresser le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto x^{-3,1}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2,5}{n}\right)^n$

Exercice 31:
Voici les chiffres d'affaires de deux groupes de la grande distribution en 2019:

- groupe Rondpoint : $59,5$ milliards d'euros.
- groupe Auprès : $82,1$ milliards d'euros.

A partir de 2019, la direction du groupe Rondpoint prévoit une croissance annuelle de $6,5\%$ et celle du groupe Auprè de 3%. Déterminer, selon ces prévision, à partir de quelle année, le chiffre d'affaires du groupe Rondpoint dépassera celui du groupe Auprè.

Exercice 32:
Soit $n \in \ltimes$, simplifier $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$.
(Pour les plus motivé(e)s) Conjecturer à partir de la résolution un résultat plus général.

Exercice 33:
Existe-t-il un point de la courbe représentative du logarithme tel que la tangente à cette courbe représentative passant par ce point passe par l'origine ?

Exercice 34:
Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{x}$.

Exercice 35:
Simplifier les expressions suivantes :

1. $x^{\dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}}$
2. $\log_x\left(\log_x x^{x^y}\right)$