

# 1 Primitives et équations différentielles

## 1.1 Compétences Attendues

- Calculer une primitive en utilisant les primitives de référence et les fonctions de la forme  $(v' \circ u)u'$ .
- Pour une équation différentielle  $y' = ay + b(a \neq 0)$  : déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer toutes les solutions.
- Pour une équation différentielle  $y' = ay + f$  : à partir de la donnée d'une solution particulière, déterminer toutes les solutions.

## 1.2 Exercices

### Exercice 1:

Soit  $f : x \mapsto 3x^2 - 3x$  et  $F : x \mapsto x^3 - \frac{3}{2}x^2$ .

1. Vérifier que  $F$  est une primitive de  $f$ .
2. Déterminer la primitive de  $f$  qui s'annule en  $-1$ .

### Exercice 2:

Déterminer sur  $\mathbb{R}_+^*$  la primitive  $F$  de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2} - 1$  vérifiant  $F(1) = -1$ .

### Exercice 3:

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

- |                                 |                                        |
|---------------------------------|----------------------------------------|
| 1. $x \mapsto -3$               | 3. $x \mapsto \frac{x^2}{3} - x$       |
| 2. $x \mapsto 2x - \frac{1}{3}$ | 4. $x \mapsto 3x^2 + \frac{2x}{3} - 7$ |

### Exercice 4:

Déterminer sur  $\mathbb{R}$  la primitive  $F$  de  $f : x \mapsto e^x$  vérifiant  $F(0) = e$ .

### Exercice 5:

Déterminer sur  $\mathbb{R}$  la primitive  $F$  de la fonction  $f : x \mapsto 3x^2 - 2x$  vérifiant  $F(1) = 2$ .

### Exercice 6:

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

- |                                                       |                                                          |
|-------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| 1. $x \mapsto \frac{1}{(x+2)^2}$ sur $] -\infty; 2[$  | 3. $x \mapsto \frac{x}{(x^2+2)^3}$ sur $\mathbb{R}$      |
| 2. $x \mapsto \frac{2}{(x+3)^2}$ sur $] -3; +\infty[$ | 4. $x \mapsto \frac{3x^2}{(x^3-1)^4}$ sur $]1; +\infty[$ |

### Exercice 7:

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

- |                                     |                                                            |
|-------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| 1. $x \mapsto e^x - 2e^{-x}$        | 3. $x \mapsto \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$    |
| 2. $x \mapsto \frac{2x}{(x^2+3)^2}$ | 4. $x \mapsto \frac{9x^2-3}{(x^3-x)^2}$ sur $]1; +\infty[$ |

### Exercice 8:

Déterminer sur  $\mathbb{R}$  la primitive  $F$  de  $f : x \mapsto \sin(2t)$  vérifiant  $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ .

### Exercice 9:

Dans chaque cas, déterminer les solutions de l'équation différentielle donnée.

- |                  |                  |                         |
|------------------|------------------|-------------------------|
| 1. $y' = 2$      | 3. $y' = 5x - 3$ | 5. $y' = x^3$           |
| 2. $y' = 1 - 2x$ | 4. $y' = x^2$    | 6. $y' = 3x^2 + 2x + 1$ |

### Exercice 10:

Dans chaque cas, déterminer les solutions de l'équation différentielle donnée.

- |                                            |                                                       |                                 |
|--------------------------------------------|-------------------------------------------------------|---------------------------------|
| 1. $y' = \frac{1}{x^3}$ sur $]0; +\infty[$ | 2. $y' = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$ | 3. $y' = -e^x$ sur $\mathbb{R}$ |
|--------------------------------------------|-------------------------------------------------------|---------------------------------|

### Exercice 11:

Dans chaque cas, résoudre les équations différentielles après les avoir transformés puis préciser l'ensemble de définition des solutions.

- |                         |                       |
|-------------------------|-----------------------|
| 1. $x^2y' = -1$         | 3. $x^4y' = 3(x-1)^2$ |
| 2. $\sqrt{x}y' + 1 = 0$ | 4. $e^{2x}y' = -e^x$  |

**Exercice 12:**

Dans chaque cas, déterminer la solution  $F$  de l'équation différentielle donnée.

$$\left. \begin{array}{l} 1. y' = x - 1 \text{ avec } F(1) = -1 \\ 2. y' = x^2 - x + 1 \text{ avec } F(0) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3. y' = x^3 + x + \frac{1}{x^2} \text{ avec } F(1) = \frac{3}{4} \\ 4. y' = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{x^5} \text{ avec } F(-1) = 1 \end{array}$$

**Exercice 13:**

Dans chaque cas, déterminer les solutions de l'équation différentielle donnée.

$$\left. \begin{array}{l} 1. y' - \frac{1}{2}y = 0 \\ 2. 2y' - 3y = 8y + 4y' \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3. 5y' + 3y = 0 \\ 4. -\frac{3}{2}y' - \sqrt{2}y = 0 \end{array}$$

**Exercice 14:**

Dans chaque cas, déterminer la solution  $F$  de l'équation différentielle donnée.

$$\left. \begin{array}{l} 1. y' - \sqrt{2}y = 0 \text{ avec } F(\sqrt{2}) = 1 \\ 2. 2y' - 3y = 2y + 3y' \text{ avec } F(0) = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3. \frac{1}{2}y' + y = \frac{1}{2}y - y' \text{ avec } F(3) = \frac{1}{e} \end{array}$$

**Exercice 15:**

Soit  $f$  la solution de l'équation différentielle  $(E) : 3y' - 6y = 1$  avec  $f'(1) = 2$ .

- Déterminer  $f(1)$ .
- Déterminer la solution  $f$ .

**Exercice 16:**

Montrer que  $\phi : x \mapsto 3x - 1$  est solution particulière de l'équation différentielle  $(E) : y' + 3y = 9x$  puis donner toutes les solutions de  $(E)$ .

**Exercice 17:**

Après avoir déterminé une fonction affine  $\phi$  solution particulière de l'équation différentielle  $(E) : 2y' - y = 2x$ , déterminer la solution  $F$  de  $(E)$  telle que  $F(0) = -2$ .

**Exercice 18:**

Montrer que  $\phi : x \mapsto x^2 - x - 1$  est solution particulière de l'équation différentielle  $(E) : y' - 3y = 3x^2 + x + 2$ , puis donner toutes les solutions de  $(E)$ .

**Exercice 19:**

Montrer que  $\phi : x \mapsto xe^{-x}$  est solution particulière de l'équation différentielle

$(E) : y' + y = e - x$  puis donner toutes les solutions de  $(E)$ .

**Exercice 20:**

Déterminer les solutions de l'équation différentielle en cherchant une solution particulière  $\phi$  de la forme indiquée.

- $2y' + y = x + 1$  avec  $\phi(x) = mx + p$
- $y' + 3y = 2x - 1$  avec  $\phi(x) = mx + p$
- $y' - 3y = -3x^2 - x - 2$  avec  $\phi(x) = ax^2 + bx + c$
- $2y' - 3y = -3x^2 - x - 2$  avec  $\phi(x) = ax^2 + bx + c$

**Exercice 21:**

Déterminer les solutions de l'équation différentielle en cherchant une solution particulière  $\phi$  de la forme indiquée.

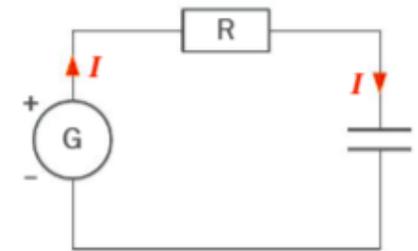
- $y' + 3y = (2 + 2x)e^{-2x}$  avec  $\phi(x) = (mx + p)e^{-2x}$
- $y' + y = (3 - 2x)e^x$  avec  $\phi(x) = (mx + p)e^x$
- $y' - 2y = -(3x^2 + x + 2)e^{-x}$  avec  $\phi(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

**Exercice 22:**

Un condensateur de capacité  $C = 20\mu F$  est placé, avec une résistance  $R = 1000\Omega$ , dans un circuit électrique  $RC$  dont le générateur est une alimentation stabilisée délivrant une tension continue  $E = 6V$ . La charge  $q$  du condensateur vérifie l'équation  $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R}$  et elle est nulle à l'instant  $t = 0$ .

- Ecrire l'équation vérifiée par  $q$  sous la forme  $y' = ay + b$ . Résoudre cette équation sur  $\mathbb{R}_+$  et donner une expression de  $q$  en fonction de  $t$ .

- Quelle charge le condensateur tend-il à avoir si on attend suffisamment ? Au bout de combien de temps atteint-il la moitié de cette charge ?



**Exercice 23:**

La vitesse de chute verticale  $v$  (en  $m/s$ ) d'un objet de masse  $m = 2kg$  vérifie l'équation  $\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma}{m}v$  où  $g = 9,8 m/s^2$  est le norme du champ de pesanteur,  $\gamma = 1,96 kg/s$  le coefficient de frottement et  $t$  le temps (en  $s$ ) écoulé depuis le début de la chute.

1. Ecrire l'équation vérifiée par  $v$  sous la forme  $y' = ay + b$ . Résoudre cette équation sur  $\mathbb{R}_+$  et donner une expression générale de  $v$  en fonction de  $t$ .
2. Quel est le comportement de  $v$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ ? Interpréter dans le contexte.

**Exercice 24:**

On place un capital de 2000 euros dans une banque aux taux d'intérêt annuel composé de 1,5%.

1. On note  $C_n$  la valeur du capital acquis au bout de  $n$  années de placement.
  - (a) Donner une expression de  $C_n$  en fonction de  $n$ .
  - (b) En supposant que ce capital évolue de manière journalière et en notant  $S_n$  sa valeur acquise au bout de  $n$  jours, justifier que, pour tout entier positif  $n$ , on a  $S_n = 2000 \times \left( e^{\frac{1}{365} \ln(1,015)} \right)^n$
2. On suppose que le capital évolue à chaque instant et on note  $f(t)$ , en euros, sa valeur acquise après  $t$  années. On considère alors que  $f$  est dérivable et que, pour tout nombre réel strictement positif  $t$ , on a  $f'(t) = 0,015f(t)$ . Résoudre cette équation différentielle sur  $\mathbb{R}_+$ .
3. Comparer les valeurs acquises au bout de 3 jours, 125 jours, 1 an et 2 ans avec chacun des deux modèles proposés. Que constate-t-on?

**Exercice 25:**

Dans une usine, la température d'un moteur thermique est régulée par un système de circulation d'eau de refroidissement. Quand la température de cette eau atteint  $90^\circ\text{C}$ , un ventilateur se met en action afin de refroidir le liquide dans le radiateur. Il s'arrête lorsque la température redevient inférieure à  $50^\circ\text{C}$ .

On mesure le temps  $t$  (n minutes) écoulé à partir de l'instant où le ventilateur se déclenche.

On admet que la température de l'eau, exprimée en degré Celsius, est donnée à l'instant  $t$  par  $f(t)$  où la fonction  $f$  vérifie sur  $[0, +\infty[$  l'équation différentielle (E) :  $f' + 0,04f = k$  avec  $k \in \mathbb{R}$ ,  $f(0) = 90$  et  $f(10) = 77,14$ .

1. Déterminer la solution  $f$  sur  $[0; +\infty[$  de (E) qui vérifie les conditions initiales.
2. Le ventilateur va-t-il s'arrêter? Justifier.

**1.3 Algorithmes et Python****Exercice 26:**

On considère des fonctions polynomiales  $f : x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  avec  $(a_0; a_1; \dots; a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Pour modéliser en Python une telle fonction, on utilise une liste  $P=[a_0, a_1, \dots, a_n]$ .

1. (a) Recopier et compléter la fonction `image` suivante, qui calcule l'image d'un nombre  $x$  par la fonction  $f$ , donnée sous la forme d'une liste  $P$  passée en paramètre.

```

1 def image(P, x):
2     res=0
3     for exp in range(0, len(P)):
4         res=...
5     return res

```

- (b) Tester la fonction avec  $f : x \mapsto 1 + 4x + 9x^2$  pour  $x = 2$ .

2. (a) Recopier et compléter la fonction `primitive` qui renvoie une liste correspondant à la primitive de  $f$  qui prend la valeur  $b$  en  $a$ .

```

1 def primitive(P, a, b):
2     primi=[0]
3     for exp in range(0, len(P)):
4         primi.append(...)
5     primi[0]=...
6     return primi

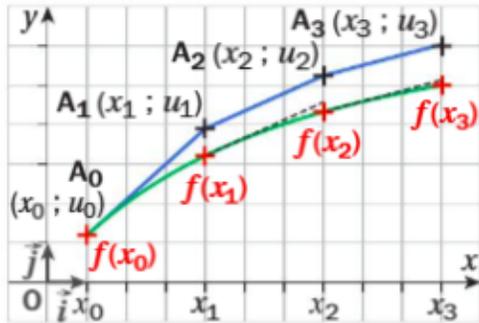
```

- (b) En déduire la primitive  $F$  de  $f : x \mapsto 1 + 4x + 9x^2$  telle que  $F(1) = 2$

**Exercice 28:**

Lorsqu'il est difficile de trouver une primitive de  $g$ , on cherche une approximation ponctuelle d'une solution  $f$  de l'équation  $y'(x) = g(x)$  sur un intervalle  $[c; d]$  à l'aide de la méthode d'Euler.

- On décompose l'intervalle  $[c; d]$  en :  $[x_0; x_1] \cup [x_1; x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}; x_n]$  avec  $x_0 = c$  et  $x_n = d$ .
- On approche alors la courbe représentative de  $f$  par la famille de segments  $[A_i; A_{i+1}]$ ,  $i \in [0; n-1]$  où les coordonnées des points  $A_i$  sont notées  $(x_i; u_i)$  avec  $u_0 = f(x_0)$ .
- Chaque valeur  $u_i$  est calculée en fonction de  $u_{i-1}$  en imposant à chaque segment d'être parallèle à la tangente à la courbe au point  $(x_i; f(x_i))$ .



1. Montrer que  $u_{i+1} = g(x_i) \times (x_{i+1} - x_i) + u_i$  pour  $0 \leq i \leq n - 1$ .
2. Recopier et compléter la fonction `euler`, qui prend en paramètre l'intervalle  $I = [c; d]$  sous forme de liste,  $f$  et un pas  $p$ , écart constant entre  $x_i$  et  $x_{i+1}$  pour  $0 \leq i \leq n - 1$  et qui renvoie la liste des  $x_i$  et la liste des  $u_i$ .

```

1 def euler(I, f, p):
2     c=I[0]
3     liste_x=[...]
4     liste_u=[...]
5     i=0
6     while ... <= ...:
7         i=i+1
8         liste_x.append(c+i*p)
9         liste_u.append(...)
10    return [liste_x, liste_u]

```

3. Appliquer la méthode d'Euler à la résolution de  $y'(x) = x^2 - 2x + 1$  avec un pas de  $10^{-2}$  pour trouver un approximation de la solution  $f$  vérifiant  $f(0) = 2$ , puis représenter l'ensemble des points obtenus de coordonnées  $(x_i; u_i)$  grâce au module `matplotlib`.
4. Trouver la solution exacte de cette équation et la représenter avec son approximation dans le même repère. Evaluer alors la qualité de l'approximation.

## 1.4 Approfondissements

**Exercice 29:** On considère l'équation différentielle  $(E) : y' = ky(A - y)$  où  $(A, k) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$ .

1. On suppose que  $y$  est solution de  $(E)$  sur un intervalle  $J \subset \mathbb{R}$  et ne s'y annule pas et on pose  $z = \frac{1}{y}$ . Montrer que  $z$  est solution d'une équation différentielle que l'on écrira en fonction de  $k$  et de  $A$ .

2. En déduire que les solutions de l'équation différentielle  $(E)$  sont de la forme  $y : x \mapsto \frac{A}{1 + Be^{-kAx}}$  avec  $B \in \mathbb{R}$ .
3. Proposer l'allure des courbes représentatives de ces solutions en fonctions des signes de  $k$  et  $B$ .

### Exercice 30:

On considère l'équation différentielle d'inconnue  $y : (E) : y'' - y' - 2y = 2xe^x$ . Cette équation différentielle est une équation différentielle du second ordre avec second membre.

1. Soient  $A, B \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $x \mapsto Ae^{-x} + Be^{2x}$  définie sur  $\mathbb{R}$  est une équation particulière de l'équation homogène associée  $(E_0) : y'' - y' - 2y = 0$ . On admet que toutes les solutions de  $(E_0)$  sont de cette forme.
2. Déterminer une solution particulière  $\phi$  de  $(E)$  de la forme  $x \mapsto (mx + p)e^x$ .
3. Soit  $g$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  telle que  $g$  et  $g'$  soient dérivables sur  $\mathbb{R}$ . Démontrer que  $g$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $g - \phi$  est solution de  $(E_0)$ .
4. Résoudre  $(E)$  et déterminer la solution  $h$  de  $(E)$  telle que  $h(0) = 1$  et  $h'(0) = 0$ .

### Exercice 31:

On veut résoudre l'équation différentielle d'inconnue  $y : (E) : y'' - y' - 6y = -6x^2 + 4x - 3$ . Cette équation différentielle est une équation du second ordre avec un second membre.

1. Montrer que l'équation  $(E)$  admet comme solution une fonction polynôme du second degré  $\phi$  que l'on déterminera.
2. Soit  $g$  une fonction deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$ . Démontrer que  $g$  est solution de  $(E)$  si et seulement si,  $g - \phi$  est solution de l'équation différentielle  $(E_0) : y'' - y' - 6y = 0$ .
3. On admet que si l'équation caractéristique  $ar^2 + br + c = 0$  associée à l'équation différentielle du second ordre  $ay'' + by' + cy = 0$  possède deux racines réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , alors les solutions de  $ay'' + by' + cy = 0$  sont de la forme  $x \mapsto Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ ,  $A, B \in \mathbb{R}$ .
  - (a) Résoudre l'équation  $(E_0)$ .
  - (b) En déduire les solutions de  $(E)$ .
4. Déterminer la solution  $f$  de  $(E)$  telle que  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 4$ .